ОСОБЕННОСТИ ПОСТАНОВКИ И РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ В АДАПТИВНОМ МЕТОДЕ

Кочнев В.А (ИВМ СО РАН)

С использованием адаптивного метода удается решать многие сложные задачи геофизики. Перечислим некоторые из них: обратные кинематические задачи отраженных и преломленных волн [1, 2], обратная динамическая задача отраженных волн в сейсморазведке [3, 4, 7], обратные задачи гравиметрии и магнитометрии [4, 5, 6, 12, 13, 14], а также ряд других задач [9,10]. Начаты ранее [16] и в настоящее время продолжены исследования метода для решения обратной задачи магнитотеллурического зондирования (МТЗ).

История возникновения и развития метода приведена в статье [10].

Прежде чем рассматривать свойства метода, приведем постановку задачи. Предполагается, что имеется некоторая модель, характеризующаяся набором параметров. Это может быть вектор или набор векторов, матрица (2D или 3D) или набор матриц и векторов. Обозначим значения неизвестных параметров X $\{x_1, x_2, \dots x_j, \dots x_n\}$

Имеется математическая модель, связывающая неизвестные значения параметров с некоторым наблюдением (или преобразованным результатом наблюдения), представленные в виде системы линейных или нелинейных алгебраических уравнений $U=AX$ или $U=f(X)$.

Предполагается, что известны начальные приближения параметров модели и погрешности начальных приближений и погрешности данных, используемых для решения обратной задачи. Такая постановка называется статистической и известно много методов ее решения. В частности, известна полная статистическая постановка, в которой задаются не только погрешности, но и ковариационные матрицы [15].

Из общей статистической постановки нетрудно получить рекуррентный алгоритм, позволяющий уточнять оценки параметров, переходя последовательно от уравнения к уравнению. Достоинством рекуррентного метода является то, что он за один проход всех уравнений позволяет получить искомое решение и оценку ковариационной матрицы, а следовательно, и погрешности решений. Однако он, как и многие другие методы, связанные с обращением и умножением матриц, позволяет решать системы с небольшим числом неизвестных. Это обусловлено следующими причинами.

1. С ростом числа уравнений растут ошибки, связанные с умножением матриц
2. Время счета растете пропорционально n^3.
3. Память, необходимая для хранения ковариационных матриц, растет пропорционально n^2.

В связи с этим возникла необходимость создания метода (в классе итерационных), который был бы лишен указанных недостатков. Толчком к этому послужила острая необходимость решения нелинейной обратной кинематической задачи сейсморазведки при многократных наблюдениях отраженных волн, в которой неизвестными являются и статические поправки (вектора) и значения нулевых времен и скоростей пробега волн (матрицы). В роли U выступают времена прихода отраженных волн, которые, естественно, содержат погрешности, не учитывать которые означает обрекать алгебраическую постановку решения на неудачу. Никакой метод, в том числе и в статистической постановке, и методы регуляризации по А.Н.Тихонову (в силу причин, указанных выше), не могли решать кинематическую задачу, в которой число неизвестных было около 10^2–10^3, а сейчас при 3D-наблюдениях 10^4 и более. Кстати, уязвимость методов регуляризации в последнее время видим ив работах В.Н.Страхова [17].

Обоснование такого итерационного (адаптивного) метода впервые сделано в 1977 г. и в 1983 г. опубликовано в работе [1]. История дальнейшего развития приведена в [10].

Обсуждая особенности метода, следует заметить следующее.

Метод обобщает детерминированный метод проекций, известный математикам как метод Качмажа [15].

Запишем формулы метода, чтобы пояснить эту мысль. Каждое неизвестное на k+1 шаге будет равно

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{a_{ij}(D_{xj})^k}{D_{ui} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 (D_{xj})^k}(u_i - f(X^k)) \tag{1}$$

где $k = i + n(l-1)$ – номер шага уточнения (не является показателем степени),

i – порядковый номер уравнения,

l – номер итерации,

n – число уравнений в системе,

j – порядковый номер неизвестного,

m – число неизвестных,

a_{ij} – коэффициент в l-ом уравнении j-го неизвестного. В случае нелинейной системы он будет зависеть от k,

$D_{xj}^k = (\sigma_{xj}^2)^k$ – оценка дисперсии неизвестного на k-ом шаге,

$D_u = \sigma_{uj}$ – дисперсия ошибки измерения параметра u в i-ом уравнении.

Оценка дисперсии x_j на каждом шаге уменьшается следующим образом.

$$D_{xj}^{k+1} = D_{xj}^k (1 - \frac{a_{ij}^2 (D_{xj})^k}{D_{ui} + \sum_1^m a_{ij}^2 (D_{xj})^k} \tag{2}$$

Если $\sigma_{ui}^2 = 0$, а $\sigma_{xj}^2 = 1$, то получим

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{a_{ij}}{\sum a_{ij}^2}(u_i - f(x^k)) \tag{3}$$

Это и есть метод проекций или метод Качмажа.

Рассмотрим простой пример и сравним адаптивный метод с методом проекций.

Предположим, что имеем два неизвестных и всего одно уравнение (рис.1а). Имея начальное приближение x_0, y_0 и используя метод Качмажа, получим уточненное решение в основании перпендикуляра от априорной точки на линию уравнения. Используя адаптивный метод, положив $\sigma_u = 0$, а $\sigma_x = \sigma_y = 1$, получим то же самое решение.

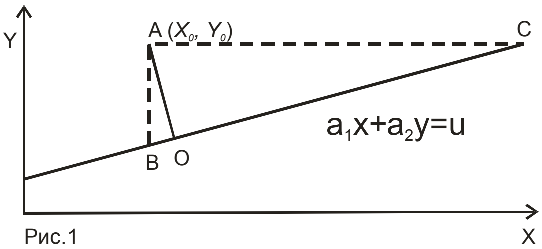

Рис.1

Но предположим, что нам известны σ_x и σ_y и они сильно отличаются. В таком случае, результат будет отличаться от предыдущего.

Если $\sigma_x = 0; \sigma_y = 1$, то получим вариант решения в точке В, а если $\sigma_x = 1; \sigma_y = 0$, то в точке С. При других вариантах σ_x и σ_y получим одно из решений в интервале точек В и С. Будут те же проекции, но в пространстве, нормированном на дисперсии, D_x и D_y.

Решая эти примеры, мы предполагаем, что уравнение абсолютно достоверное, то есть $a_1x+a_2x=u$ и u известно точно, т.е. $\sigma_u = 0$. А теперь предположим, что σ_u большое. При $\sigma_u \to \infty$ уточнение вообще не будет происходить. При σ_u, меняющемся от 0 до a, решение будет занимать пространство в треугольнике АВС. На этом простом примере показываются регуляризующие возможности метода уточнения параметров. В работах [5, 7] показаны условия сходимости метода. Метод обладает большей скоростью сходимости, чем метод проекций.

Анализ особенностей и опыта применения метода позволяет сделать следующие выводы.

Метод не накапливает ошибок округления и позволяет решать системы с большим числом неизвестных. В настоящее время реально решаются задачи с числом неизвестных 10^4 и более.

Может решать системы, где число неизвестных больше, чем число уравнений.

Обладает гибкими свойствами регуляризации.

Литература

1. Кочнев В.А., 1983. Адаптивное прослеживание сейсмических волн и оценка их параметров. Геология и геофизика, №2, 1983, с 95-104.
2. Кочнев В.А., 1988. Адаптивные методы интерпретации сейсмических данных (монография) Наука. Сиб.отд. Новосибирск., 152 с.
3. Кочнев В.А., Иванькина И.В., 1989. Исследование адаптивного подхода к задаче деконволюции. Геология и геофизика, №11, с. 128-135. Новосибирск.
4. Кочнев В.А., 1995. Адаптивные методы решения обратных задач геофизики. (Учебное пособие). Красноярский государственный университет, ВЦК СО РАН (г.Красноярск). 130 с.
5. Кочнев В.А., Хвостенко В.И., 1996. Адаптивный метод решения обратных задач гравиметрии. - Геология и геофизика, №7, с.120-129.
6. Кочнев В.А., Гоз И.В., Поляков В.С., 1996. Технология решения обратной динамической задачи по данным метода отраженных волн. Труды международного семинара "Обратные задачи геофизики" Новосибирск, 30 сент-4 окт., 1996г.
7. Кочнев В.А., 1997. Итерационный (адаптивный) подход к решению обратных геофизических задач. Математическое обеспечение и структура ЭВМ. Сб.научн.работ Красноярского технического ун-та. Красноярск.
8. Кочнев В.А., 1997. "Адаптивный метод решения систем уравнений в обратных задачах геофизики". Труды Сиб.конференции по прикладной и индустриальной математике, посв. пам. Л.В.Канторовича, с 129-137.
9. Кочнев В.А., Дьяконов М.Н., 2000. Решение обратных задач физики космических лучей с использованием адаптивного подхода. Тез.докл. четвертого сибирского конгресса по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000)
10. Кочнев В.А., 2000. Путь осознания возможностей математических моделей и алгебраических уравнений в геофизике. Геофизика, №5, 2001 г.
11. Кочнев В.А., Васильев Д.В., Сидоров В.Ю., 2002. Технология решения трехмерных задач гравиметрии. Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравиметрических, магнитных и электрических полей. Материалы 29 сессии международного семинара им. Д.Г.Успенского. Екатеринбург, 28 января – 2 февраля 2002 г.
12. Kochnev V.A., Vasiliev D.V., Sidorov V.Y., 2002. The technique of solving 3-D gravity problems. – SEG International Exposition and Annual Meeting, Salt Lake City, 2002.
13. Kochnev V.A., Goz I.V., 2003. The technology of forward and inverse modeling for 3D and 2D magnetic data. Exp.Abstr. of International Geophysical Conference & Exhibition, Moscow 2003.
14. Tarantola A., Valette B., 1982. Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion. Reviews of Geophysics and space Physics, vol.20. #2, p.219-232.
15. Наттерер Ф., 1982. Математические аспекты компьютерной томографии. Пер.с.англ. М., Мир., 288 с.
16. Бизюкин С.В., Кочнев В.А., 1988. Исследование возможностей адаптивного метода для решения обратной задачи МТЗ. Геология и геофизика, №7.
17. Страхов В.Н. 1998. Что делать? (О развитии гравиметрии и магнитометрии в России в начале XXI века). РАН, объединенный институт физики земли им. В.Ю. Шлитта. М., 24с.