

**АДАПТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
(ОСОБЕННОСТИ ПОСТАНОВКИ И РЕШЕНИЯ)**

В.А.Кочнев

Институт вычислительного моделирования СО РАН (г.Красноярск)

Предполагается, что имеется некоторая модель, характеризующаяся набором параметров. Это может быть вектор или набор векторов, матрица (2D или 3D) или набор матриц и векторов. Обозначим значения неизвестных параметров

$$\mathbf{X} \{x_1, x_2, \dots x_j, \dots x_n\}$$

Имеется математическая модель, связывающая неизвестные значения параметров с некоторым наблюдением, или преобразованным результатом наблюдения

$$\mathbf{U} \{u_1, u_2, \dots u_j, \dots u_n\}$$

представленная в виде системы линейных или нелинейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{X} \text{ или } \mathbf{U} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$$

Предполагается, что известны начальные приближения параметров модели $\mathbf{X}_0$ и погрешности начальных приближений и погрешности данных, используемых для решения обратной задачи. Такая постановка называется статистической и известно много методов ее решения. В частности, известна полная статистическая постановка, в которой задаются не только погрешности, но и ковариационные матрицы.

Из общей статистической постановки нетрудно получить рекуррентный алгоритм, позволяющий уточнять оценки параметров, переходя последовательно от уравнения к уравнению. Достоинством рекуррентного метода является то, что он за один проход всех уравнений позволяет получить искомое решение и оценку ковариационной матрицы, а следовательно, и погрешности решений. Однако он, как и многие другие методы, связанные с обращением и умножением матриц, позволяет решать системы с небольшим числом неизвестных (до 100). Это обусловлено следующими причинами.

1. С ростом числа уравнений растут ошибки, связанные с умножением матриц
2. Время счета растет пропорционально n^3 .
3. Память, необходимая для хранения ковариационных матриц, растет пропорционально n^2 .

В связи с этим возникла необходимость создания метода (в классе итерационных), который был бы лишен указанных недостатков. Толчком к этому послужила острая необходимость решения нелинейной обратной кинематической задачи сейсморазведки при многократных наблюдениях отраженных волн, в которой неизвестными являются и статические поправки (вектора) и значения нулевых времен и скоростей пробега волн (матрицы). В роли U выступают времена прихода отраженных волн, которые, естественно, содержат погрешности, не учитывать которые означает обрекать алгебраическую постановку решения на неудачу. Никакой метод, в том числе и в статистической постановке, и методы регуляризации по А.Н.Тихонову (в силу причин, указанных выше), не могли решать кинематическую задачу, в которой число неизвестных было около 10^3 – 10^4 , а сейчас при 3D-наблюдениях 10^5 и более. Метод обобщает детерминированный метод проекций, известный математикам как метод Качмажа.

Каждое неизвестное на $k+1$ шаге будет равно

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{a_{ij} (D_{xj})^k}{D_{ui} + \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 (D_{xj})^k} (u_i - f(X^k))$$

где $k = i + m(l-1)$ – номер шага уточнения (не является показателем степени),

i – порядковый номер уравнения,

l – номер итерации,

m – число уравнений в системе,

j – порядковый номер неизвестного,

n – число неизвестных,

a_{ij} – коэффициент в l -ом уравнении j -го неизвестного. В случае нелинейной системы он будет зависеть от k ,

$D_{xj}^k = (\sigma_{xj}^2)^k$ – оценка дисперсии неизвестного на k -ом шаге,

$D_u = \sigma_{uj}^2$ – дисперсия ошибки измерения параметра u в i -ом уравнении.

Оценка дисперсии x_j на каждом шаге уменьшается следующим образом.

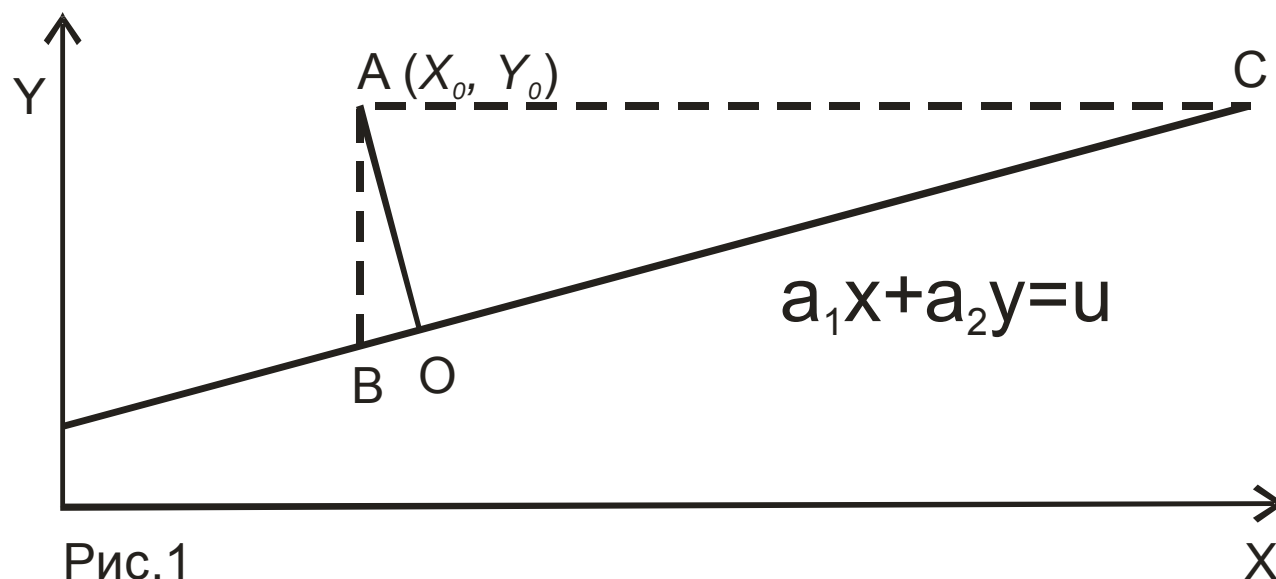
$$D_{xj}^{k+1} = D_{xj}^k \left(1 - \frac{a_{ij}^2 (D_{xj})^k}{D_{ui} + \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 (D_{xj})^k} \right)$$

Если $\sigma_{ui}^2 = 0$, а $\sigma_{xj}^2 = 1$, то получим

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{a_{ij}}{\sum a_{ij}^2} (u_i - f(x^k))$$

Это и есть метод проекций или метод Качмажа.

Рассмотрим простой пример и сравним адаптивный метод с методом проекций.



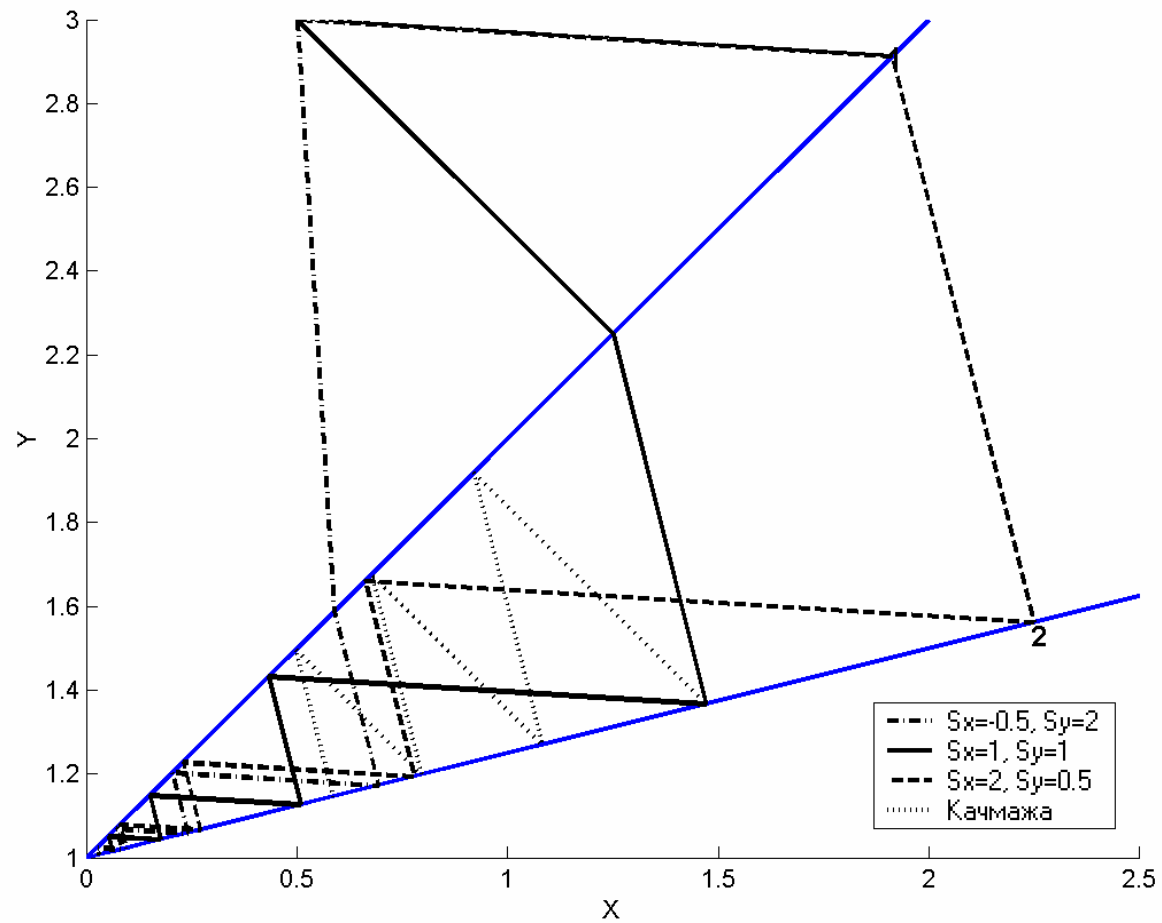
Предположим, что имеем два неизвестных и всего одно уравнение (рис.1а). Имея начальное приближение x_0, y_0 и используя метод Качмажа, получим уточненное решение в основании перпендикуляра от априорной точки на линию уравнения. Используя адаптивный метод, положив $\sigma_u = 0$, а $\sigma_x = \sigma_y = 1$, получим то же самое решение.

Но предположим, что нам известны σ_x и σ_y и они сильно отличаются. В таком случае, результат будет отличаться от предыдущего.

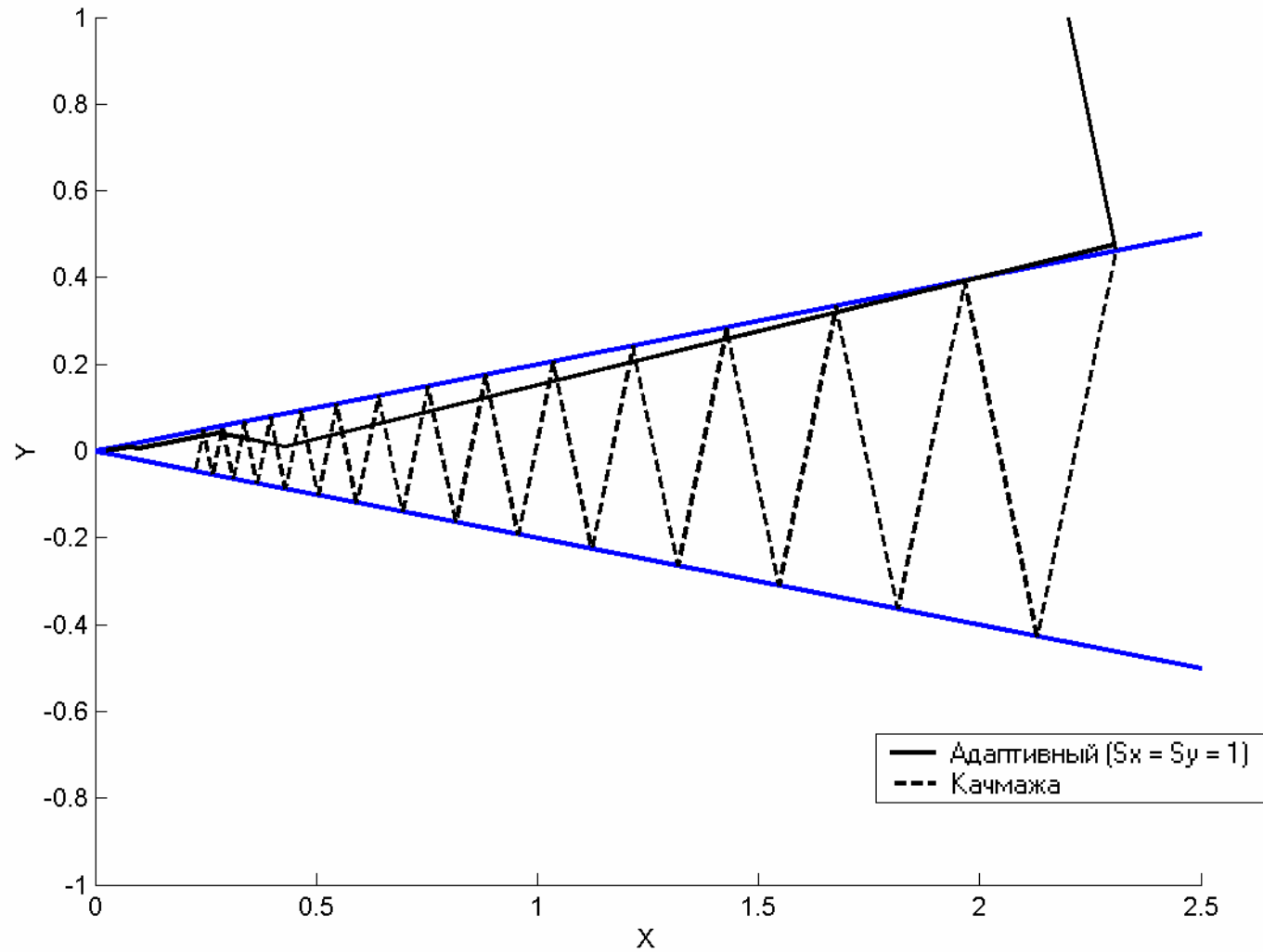
Если $\sigma_x = 0; \sigma_y = 1$, то получим вариант решения в точке В, а если $\sigma_x = 1; \sigma_y = 0$, то в точке С. При других вариантах σ_x и σ_y получим одно из решений в интервале точек В и С. Будут те же проекции, но в пространстве, нормированном на дисперсии, D_x и D_y .

Решая эти примеры, мы предполагаем, что уравнение абсолютно достоверное, то есть u известно точно, т.е. $\sigma_u = 0$. А теперь предположим, что σ_u большое. При $\sigma_u \rightarrow \infty$ уточнение вообще не будет происходить. При σ_u , меняющемся от 0 до ∞ , решение будет занимать пространство в треугольнике ABC. На этом простом примере показываются регуляризующие возможности метода уточнения параметров. В работах [5, 7] показаны условия сходимости метода.

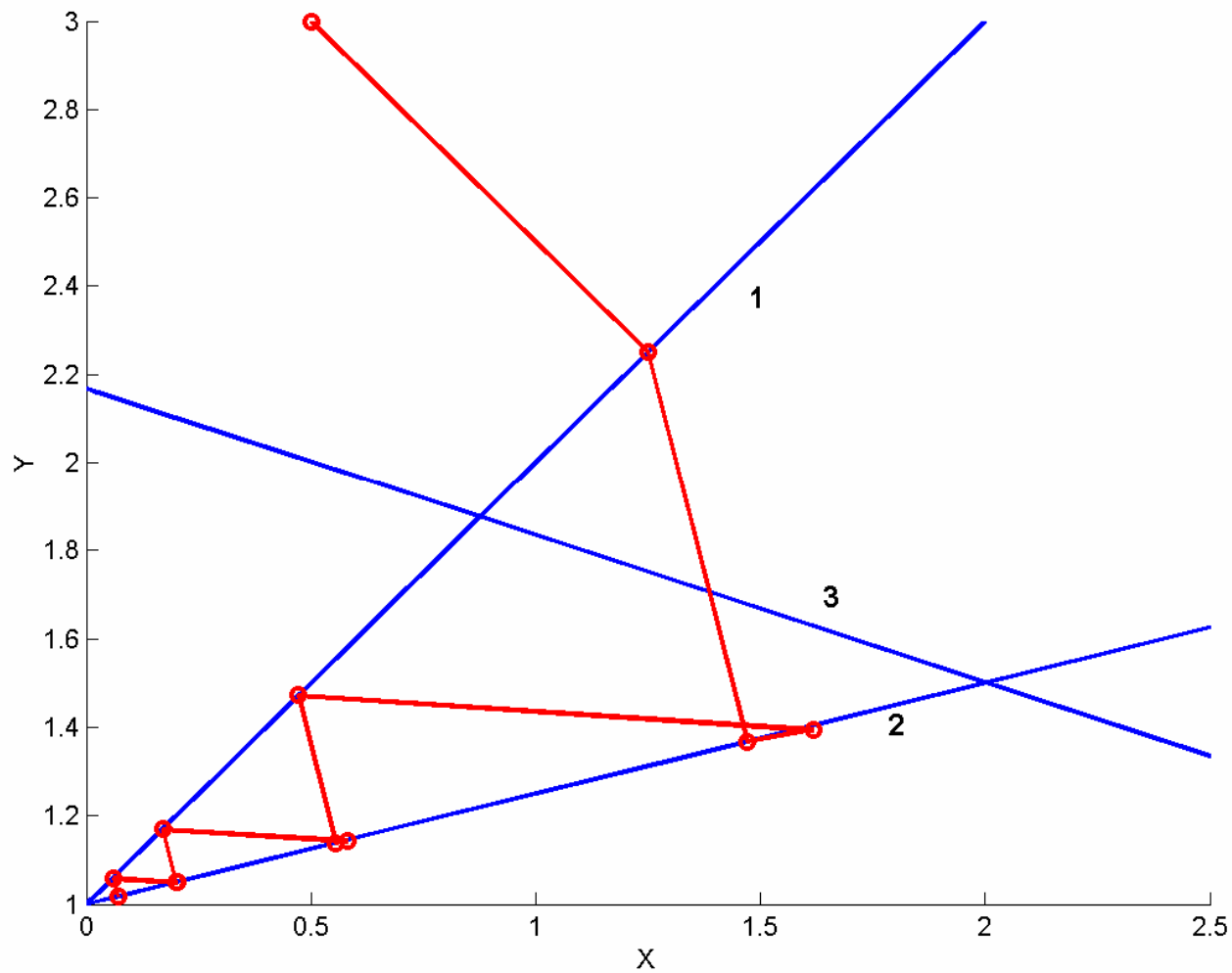
- Метод обладает большей скоростью сходимости, чем метод проекций.
- Метод не накапливает ошибок округления, так как в нем нет умножения матриц и позволяет решать системы с большим числом неизвестных. В настоящее время реально решаются задачи с числом неизвестных 10^4 и более.
- Может решать системы, где число неизвестных больше, чем число уравнений, и наоборот.
- Обладает гибкими свойствами регуляризации.



Сопоставление итеративных методов решения системы линейных уравнений
 $x - y = 1$; $-0.5x + 2y = 2$



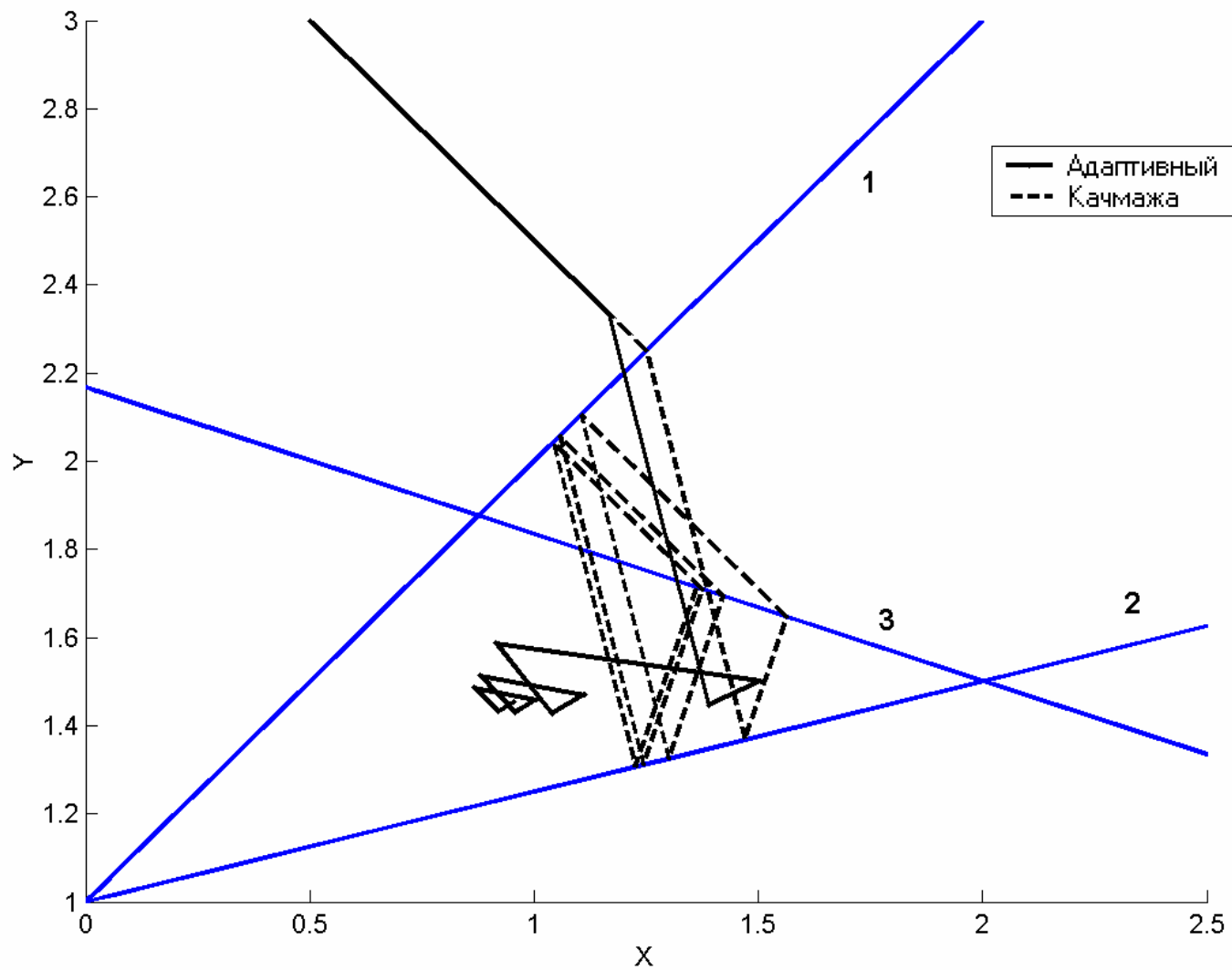
Сопоставление методов при решении системы уравнений
 $x-5y=0$; $x+5y=0$



Траектория поиска адаптивным методом решения неравноточной системы

$$x-y=1; -0.5x+2y=2; 0.333x+y=2.167$$

$$\sigma_{u1}=\sigma_{u2}=0.001; \sigma_{u3}=0.5$$



Траектория решения адаптивным методом системы трех уравнений с двумя неизвестными.

$$\sigma_{u1}=\sigma_{u2}=\sigma_{u3}=0.5$$