

**Эффективная намагниченность ядра —
результат решения обратной задачи по
геоцентрической Z -компоненте магнитного
поля IGRF-2005**

*В. А. Кочнев
ИБМ СО РАН, г. Красноярск*

Эффективная намагниченность ядра — результат решения обратной задачи по геоцентрической Z-компоненте магнитного поля IGRF-2005

Кочнев В.А., kochnev@icm.krasn.ru, <http://geoph.krasn.ru>

Институт вычислительного моделирования СО РАН, г.Красноярск, Россия

Abstract

Geocentric component of Earth's magnetic field allows for stable evaluation of the effective magnetization of the Earth's core. From the results three peaks of the magnetization were identified — two in the northern and one in the southern hemisphere.

В работе [1] приведены результаты оценки эффективной намагниченности (ЭН) ядра, полученной по модулю магнитного поля Земли. В данной работе приводятся новые результаты, полученные по геоцентрической Z-компоненте магнитного поля.

При аппроксимации, представлении и исследовании магнитного поля Земли, как правило, используется локальная система, в которой Z-компонента направлена от точки на поверхности к центру шара, X-компонента к северу, Y – к востоку. Для решения глобальной задачи, в которой объектом становится весь шар, возникает необходимость перейти к геоцентрической системе, в которой начало координат находится в центре шара, ось Z совпадает с осью вращения шара и направлена к северному или южному полюсу, оси X и Y лежат в плоскости экватора и пересекают поверхность шара на долготах 0° , 180° и 90° , 270° .

На рис.1 а,б показаны геоцентрические Z-компоненты магнитного поля над северным и южным полушарием. На рисунке видно положение полюса и некоторых городов. Вид всех изображений – со стороны северного полюса. В северном полушарии область максимума поля совпадает с полюсом, но вытянута по направлению 270° - 90° . В южном полушарии максимум смещен от полюса в сторону Австралии (CNB – Канберра).

При моделировании ядро аппроксимируется двумя полусферами (слоями), состоящими из 230 призм в каждом полушарии. Горизонтальные размеры призм 400 на 400 км, вертикальные зависят от мощности слоя. Начальная эффективная намагниченность ядра принята равной 573 А/м (рис. 1в), что создает магнитное поле, Z-компонента которого меняется от -30000 до 60000 нТл (рис. 1г). Разность исходных и модельного полей меняются от -12700 до 12300 нТл в северном и от -24000 до 20000 нТл в южном полушарии (рис. 1 д,е). В северном полушарии видим два максимума (сибирский и канадский), в южном полушарии один максимум (австралийский) и минимум, захватывающий южную часть Атлантического океана. Решение обратной задачи пакетом ADM-3D [2] [3] по Z-компоненте устойчиво, о чем свидетельствуют невязки трех вариантов счета, приведенные ниже (в нТл).

Итерация→	1	2	3	4	5	49	50
Вариант 1	5841	4729	4075	2694	3464	2836	2834
Вариант 2	11196	5434	4526	3970	3644	2851	2849
Вариант 3	10403	4105	3198	2637	2300	1434	1431

В варианте 1 уточнялась модель ЭН ядра, приведенная на рис.1г. Результативная модель ЭН (рис.2а,б) имеет два максимума ЭН в северном полушарии и один в южном. По величине максимумы в три раза превышают максимум априорной ЭН (рис. 1г).

Вариант 2 получен при априорной ЭН, равной 0. Модель оказалась близкой к модели 1. Начальные невязки в варианте 2 оказались существенно большими, а конечные практически совпали. Существенное (в два раза) уменьшение невязок получено в варианте 3. В этом варианте сделано предположение, что в целом ядро имеет боковое намагничивание, которое моделируется путем задания ненулевых намагничивающих компонент $H_x=0.2$, $H_y=0.1$, $H_z=1$ эрстед. В варианте 3 модель ЭН ядра стала проще. Конфигурация положительных аномалий не изменилась, изменились аномалии минимальных значений ЭН (рис.2 в,г).

Модель ядра по результатам моделирования магнитного поля Земли

Кочнев В.А., ИВМ СО РАН, г.Красноярск, kochnev@icm.krasn.ru, <http://geoph.krasn.ru>

"Геологи в отчаянии отвернулись от предмета [строения ядра Земли], оставив центр Земли для развлечения математикам."

— Ричард Диксон Олдчелл (1858-1936) [4]

"Ядро является кухней, где зарождаются геодинамические процессы Земли".

— Н.Л.Добрецов

Введение

Приведенные в виде эпиграфов тезисы иллюстрируют тот факт, что проблема строения ядра интересна и важна не только для математиков, геофизиков, но и геологов.

Приведем дословно выдержку из работы [5]. "В любом случае мантийные плюмы являются эффективным механизмом выноса тепла от внешнего ядра и в периоды усиления плюмовой активности, совпадающие, как правило, с ослаблением и замедлением процессов субдукции, происходит остывание внешнего ядра, ослабевает или исчезает турбулентность течений в нем и исчезают инверсии магнитного поля." По сформировавшимся представлениям [6], глобальное магнитное поле Земли вызвано электрическими токами, возникающими в ядре вследствие движения флюидов, проводящих ток. Анализируя литературу по геодинамо, мы заметили, что основное внимание в ней уделяется физико-математическим проблемам самовозбуждающегося динамо. В некоторых работах делалась попытка аппроксимировать модель ядра с помощью ограниченного числа диполей [7]. Также известна модель, состоящая из 4 диполей (квадруполь) [6]. Во всех этих моделях основным является центральный диполь, создающий 60-80% основного магнитного момента.

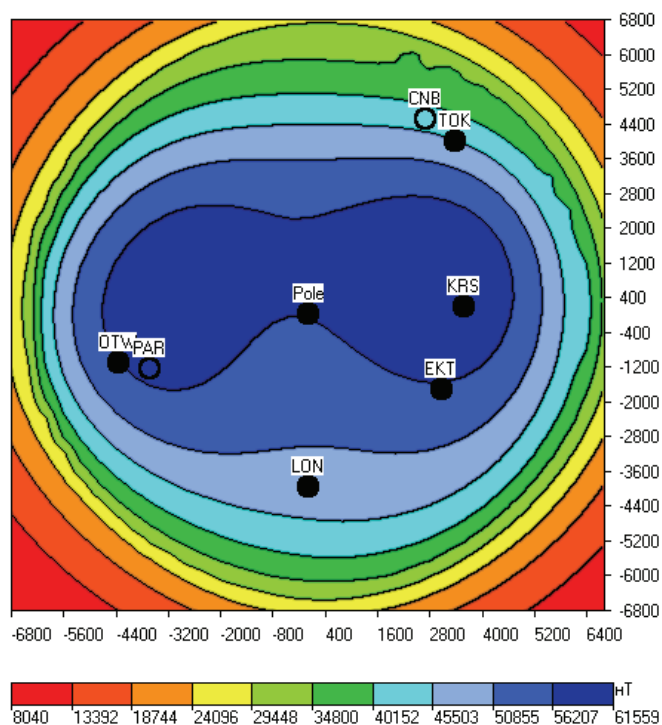
В данной работе рассчитывается модель эффективной намагниченности 460 прямоугольных призм ядра, которые бы давали поле, совпадающее с известным. В настоящее время магнитное поле благодаря спутниковым наблюдениям является наиболее изученным на разных высотах. С использованием пакета ADM-3D [2] по Z-компоненте магнитного поля IGRF-2005 решалась обратная задача, в которой уточнялась эффективная намагниченность 460 призм.

Интерпретируя полученные результаты, мы приходим к выводу о том, что магнитное поле создается тремя вихрями токов, которые формируют на поверхности глобальные магнитные аномалии: канадскую, сибирскую и австралийскую. Судя по изолиниям магнитных аномалий, наибольшие плотности токов располагаются вблизи границы ядро-мантия. В северном полушарии область пониженных и отрицательных значений эффективной намагниченности располагается вдоль меридианов 0-180°, а в южном — в юго-западной части полушария. Аномалии отрицательных пониженных значений поля, находящиеся во внешней части вихрей, создаются этими же вихрями. Модель ядра по приведенным результатам, является существенно асимметричной и неоднородной. Результаты моделирования являются устойчивыми, что было проверено большим числом численных экспериментов.

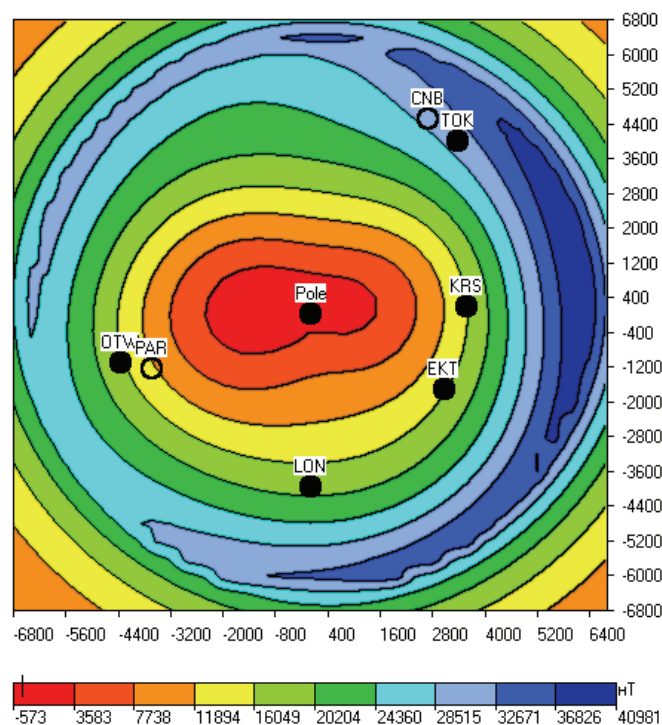
Исходное магнитное поле в локальной системе координат

Поле получено по модели IGRF
(эпоха 2005 г.) на сетке размером
35 на 35 узлов с шагом 400 км на
высоте 1 км над поверхностью
шара.

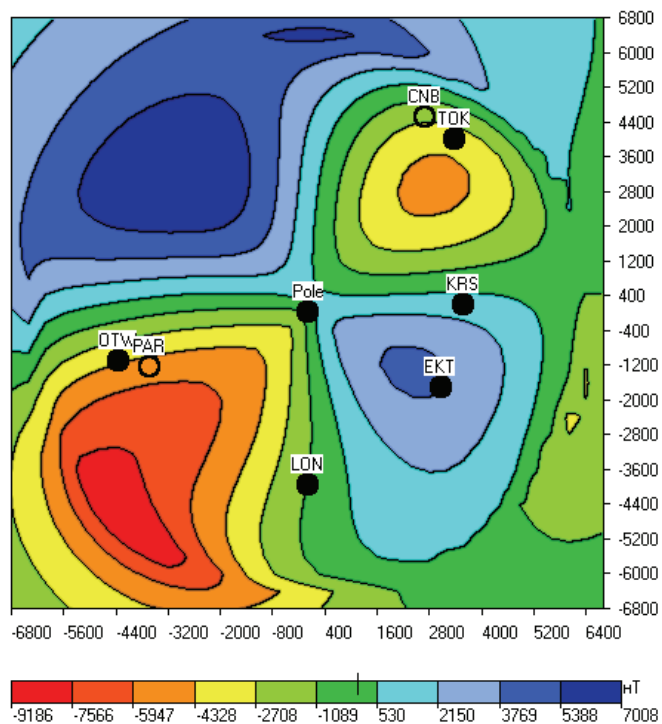
Северное полушарие



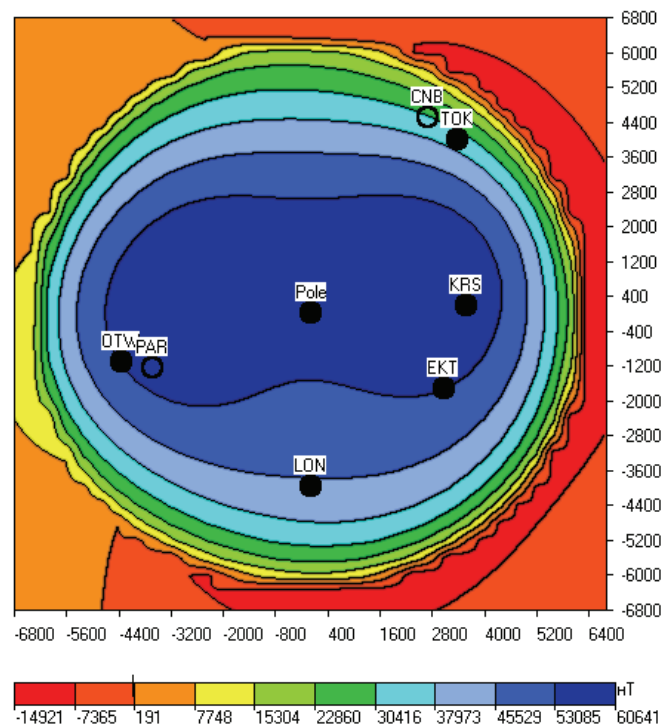
Индукция магнитного поля
Земли



Северная (X) компонента
магнитного поля Земли



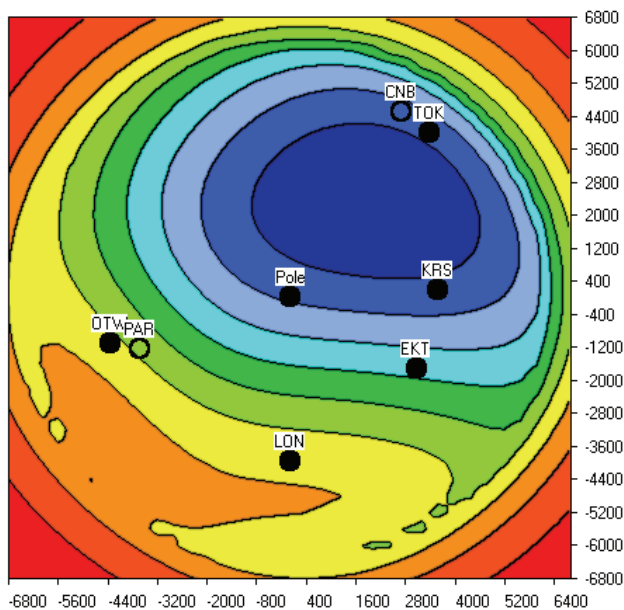
Восточная (Y) компонента
магнитного поля Земли



Вертикальная (Z) компонента
магнитного поля Земли

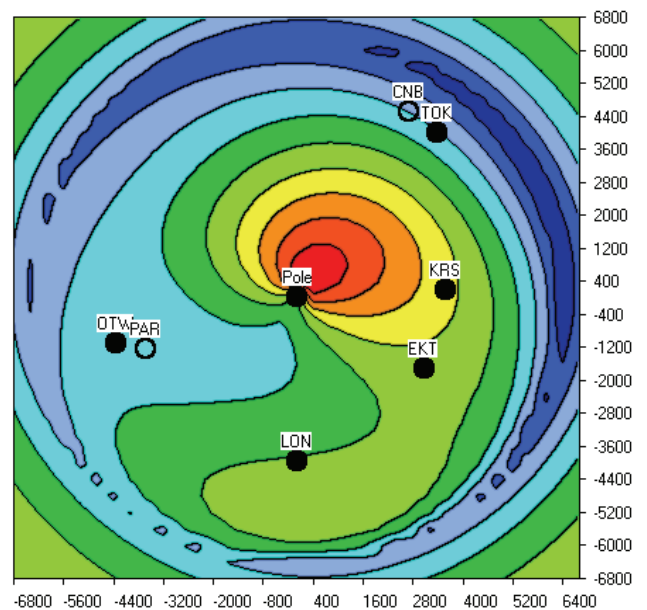
Индукция и компоненты индукции магнитного поля Земли

Южное полушарие



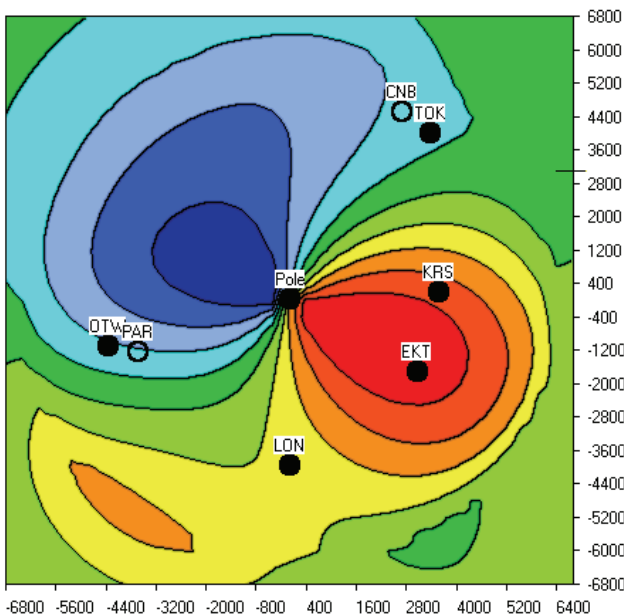
8039 13947 19855 25763 31671 37579 43487 49395 55303 61211 67119 нТ

Индукция магнитного поля
Земли



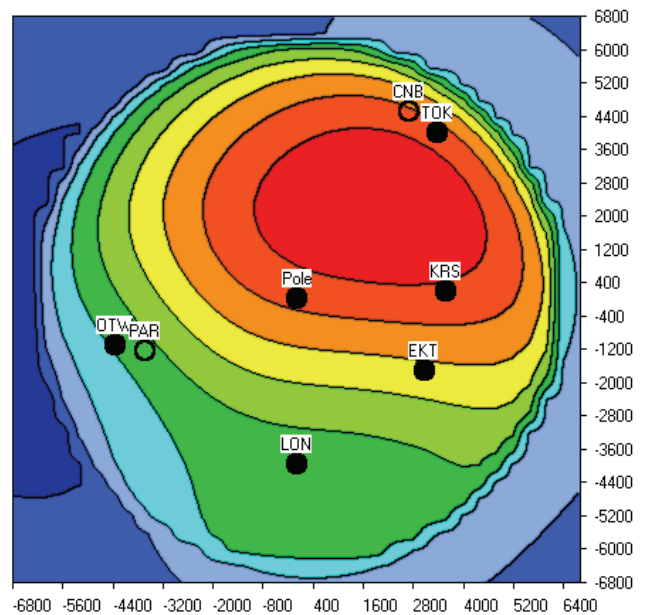
-13481 -8206 -2931 2344 7619 12894 18170 23445 28720 33995 39270 нТ

Северная (X) компонента
магнитного поля Земли



-17143 -13848 -10554 -7260 -3966 -671 2623 5917 9212 12506 15800 нТ

Восточная (Y) компонента
магнитного поля Земли



-67024 -59186 -51349 -43512 -35675 -27838 -20001 -12164 -4327 3510 11348 нТ

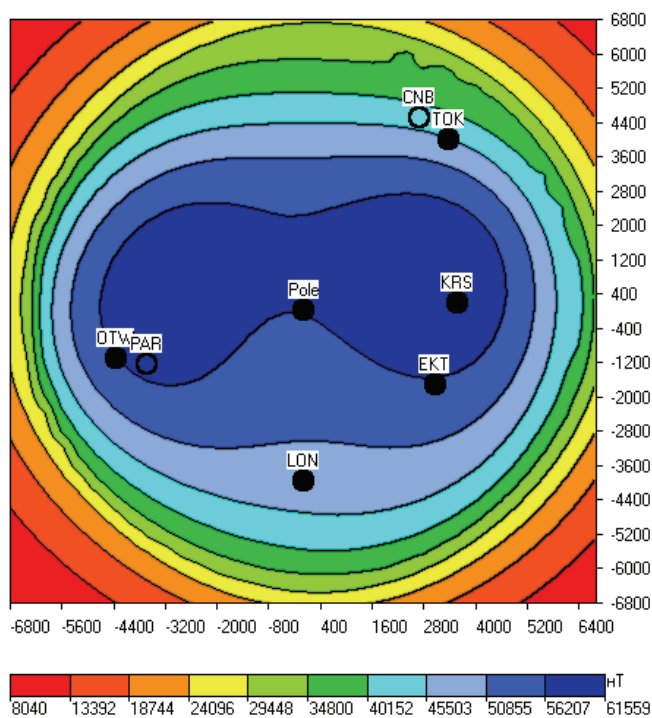
Вертикальная (Z) компонента
магнитного поля Земли

Индукция и компоненты индукции магнитного поля Земли

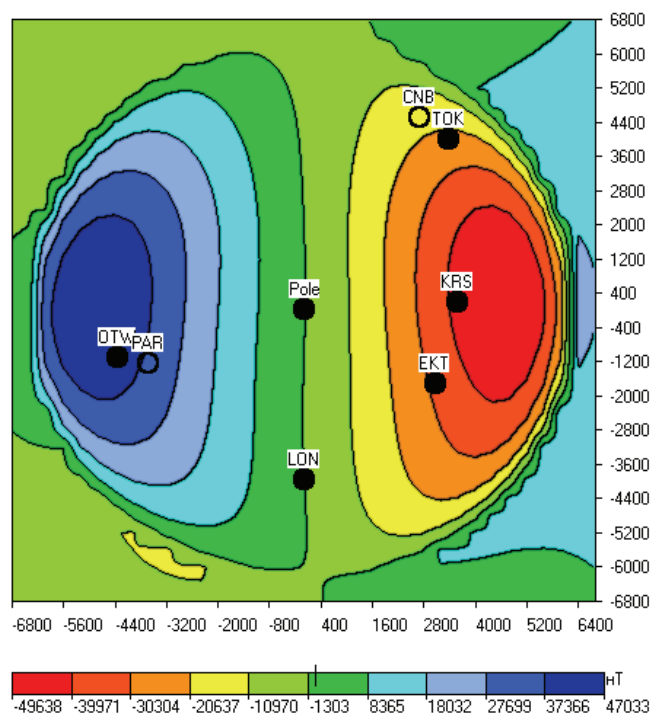
Магнитное поле Земли в геоцентрической системе координат

Начало координат в центре шара,
ось Z направлена вниз (к южному
полюсу), X — на восток, Y — к
точке 0° широты, 180° долготы.

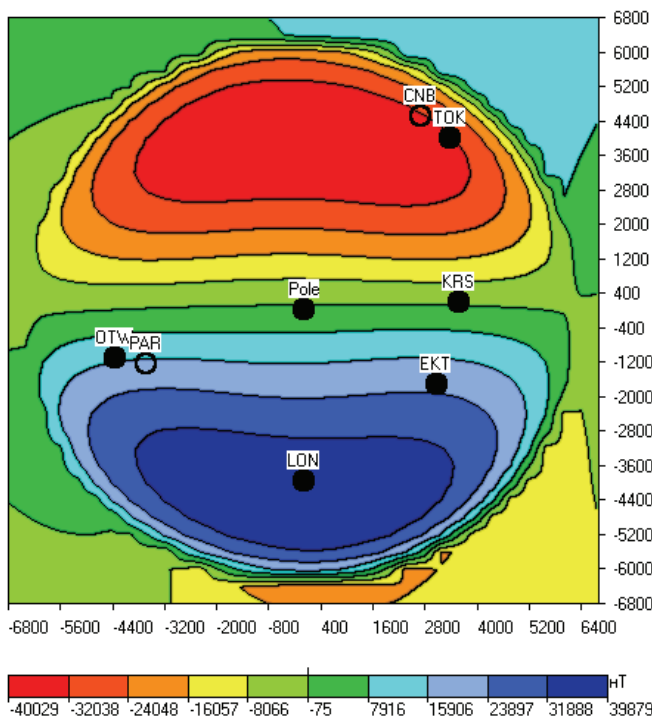
Северное полушарие



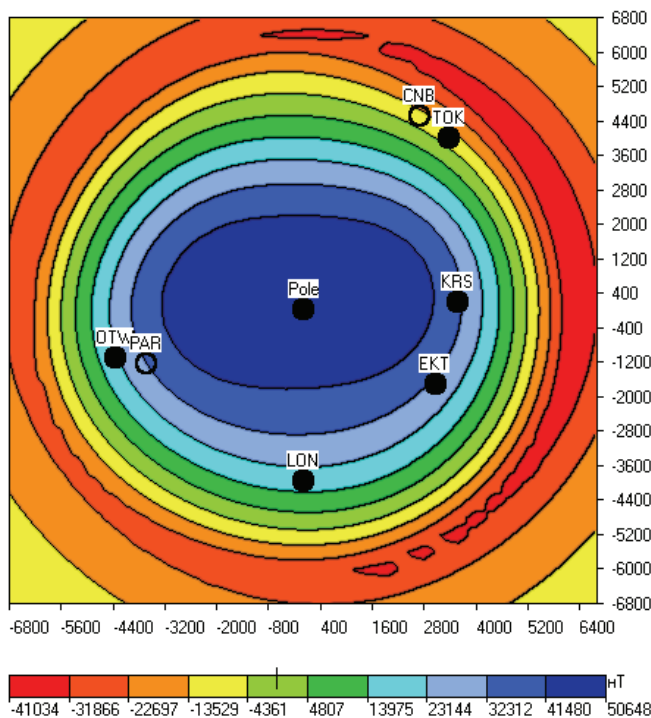
Индукция магнитного
Земли



X-компонента магнитного
поля Земли



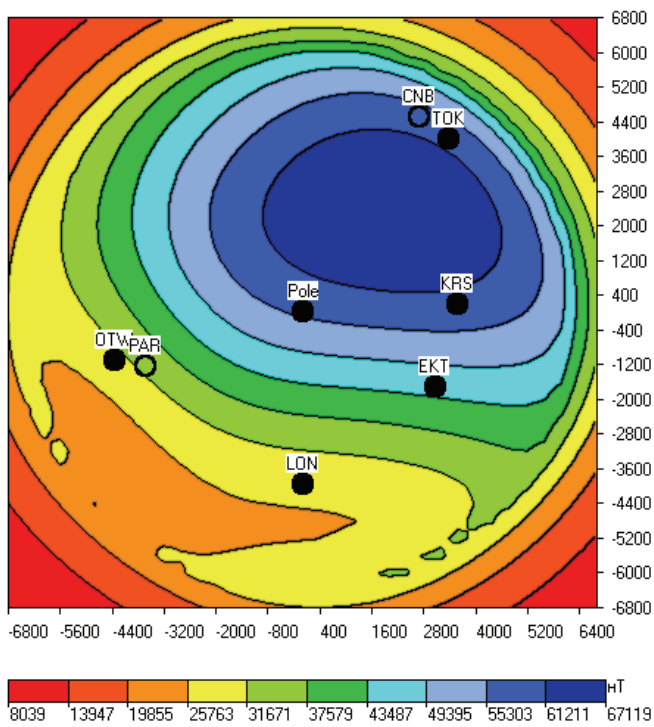
Y-компонента магнитного
поля Земли



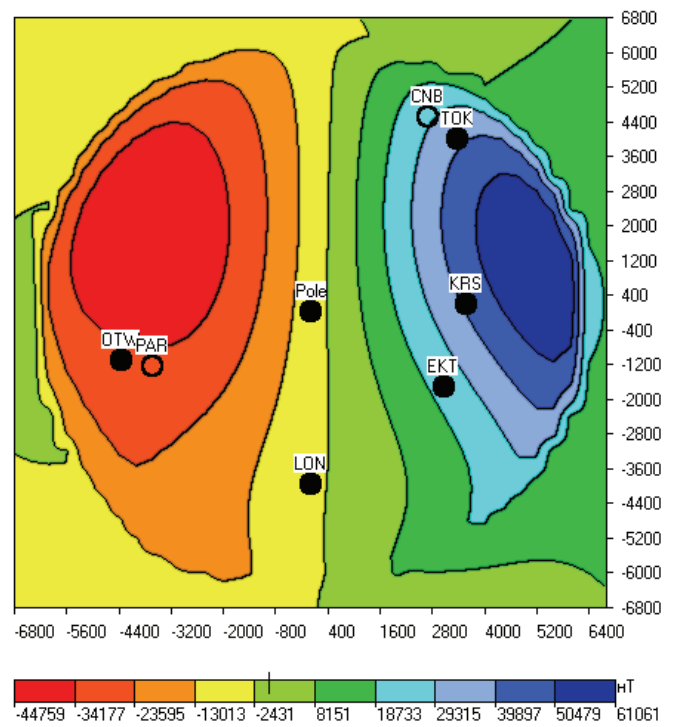
Z-компонента магнитного
поля Земли

Геоцентрические компоненты магнитного поля Земли

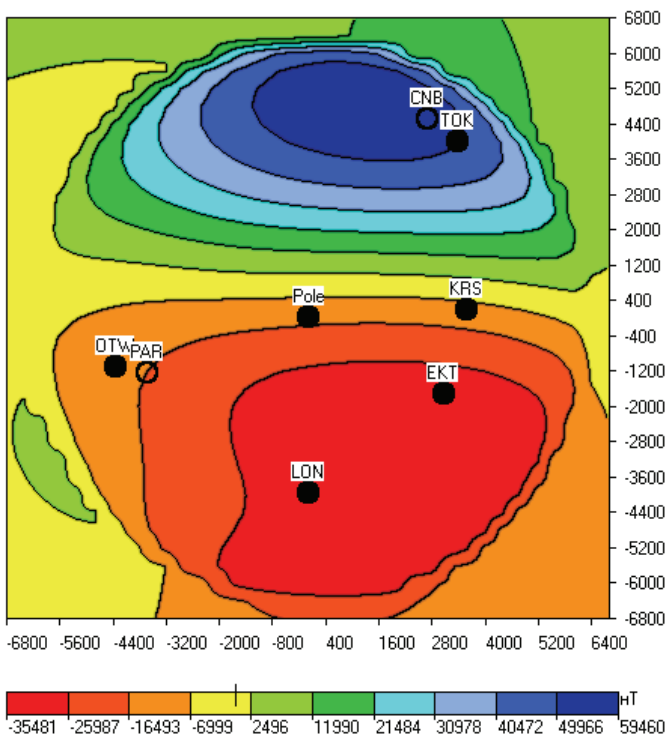
Южное полушарие



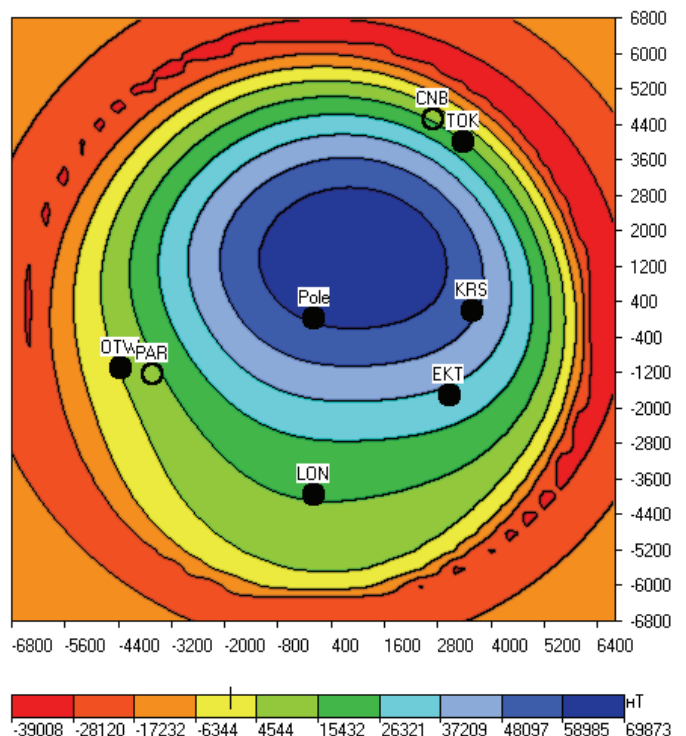
Индукция магнитного поля
Земли



X-компонента магнитного
поля Земли



Y-компонента магнитного
поля Земли



Z-компонента магнитного
поля Земли

Геоцентрические компоненты магнитного поля Земли

Решение прямой задачи

Создаваемый намагниченным телом ограниченного объема потенциал индукции магнитного поля в свободном пространстве в точке наблюдения с координатами ξ, ζ, η в системе СИ определяется уравнением [Алексидзе, 1987], [Булах, 1998].

$$\Delta U(\xi, \zeta, \eta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int_G (\vec{J}(x, y, z), \text{grad} \frac{1}{r}) dG$$

где $\vec{J}(x, y, z)$ — намагниченность (А/м) элемента объема dG , расположенного в точке с координатами x, y, z , r — расстояние от элемента объема до точки наблюдения, а интегрирование идет по всему намагниченному объему G .

Для численного интегрирования дискретизируем изучаемый объект на элементы (блоки) правильной формы (в данной работе на прямоугольные параллелепипеды), намагниченность в пределах каждого из которых примем постоянной. Расчет магнитного поля от элементарного блока для любой точки пространства может быть проведен аналитическим расчетом производной от интеграла [Алексидзе, 1987].

Для прямоугольного параллелепипеда с гранями, параллельными осям системы координат и изотропной магнитной восприимчивостью получим

$$\Delta B_x = \frac{\partial \Delta U}{\partial x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \chi (H_x V_{xx} + H_y V_{xy} + H_z V_{xz}) = C_x \chi$$

$$\Delta B_y = \frac{\partial \Delta U}{\partial y} = \frac{\mu_0}{4\pi} \chi (H_x V_{xy} + H_y V_{yy} + H_z V_{yz}) = C_y \chi$$

$$\Delta B_z = \frac{\partial \Delta U}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \chi (H_x V_{xz} + H_y V_{yz} + H_z V_{zz}) = C_z \chi$$

где H_x , H_y и H_z - горизонтальная и вертикальная составляющие вектора намагничивающего поля, а

$$V_{xx} = -\arctg \frac{(\eta - y) \cdot (\zeta - z)}{(\xi - x) \cdot R(x, y, z)} \Big|_{x1}^{x2} \Big|_{y1}^{y2} \Big|_{z1}^{z2}$$

$$V_{xy} = \ln(\zeta - z + R(x, y, z)) \Big|_{x1}^{x2} \Big|_{y1}^{y2} \Big|_{z1}^{z2}$$

$$V_{xz} = \ln(\eta - y + R(x, y, z)) \Big|_{x1}^{x2} \Big|_{y1}^{y2} \Big|_{z1}^{z2}$$

$$V_{yy} = -\arctg \frac{(\xi - x) \cdot (\zeta - z)}{(\eta - y) \cdot R(x, y, z)} \Big|_{x1}^{x2} \Big|_{y1}^{y2} \Big|_{z1}^{z2}$$

$$V_{yz} = \ln(\xi - x + R(x, y, z)) \Big|_{x1}^{x2} \Big|_{y1}^{y2} \Big|_{z1}^{z2}$$

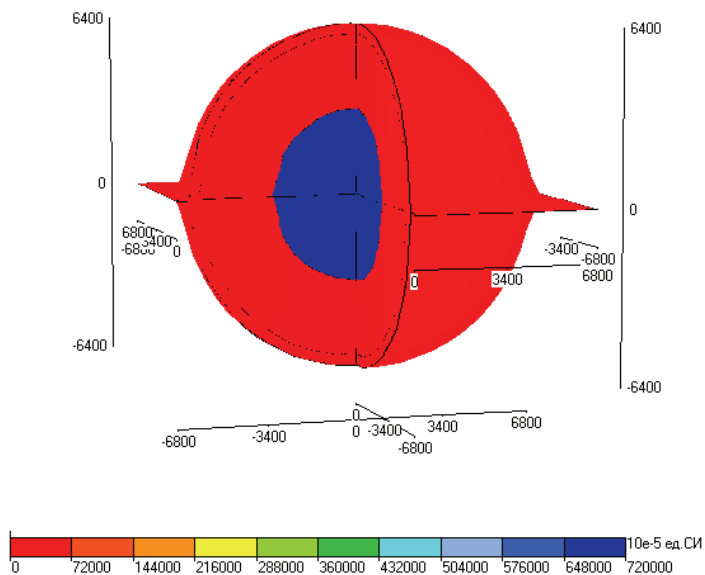
$$V_{zz} = -\arctg \frac{(\xi - x) \cdot (\eta - y)}{(\zeta - z) \cdot R(x, y, z)} \Big|_{x1}^{x2} \Big|_{y1}^{y2} \Big|_{z1}^{z2}$$

$$R(x, y, z) = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

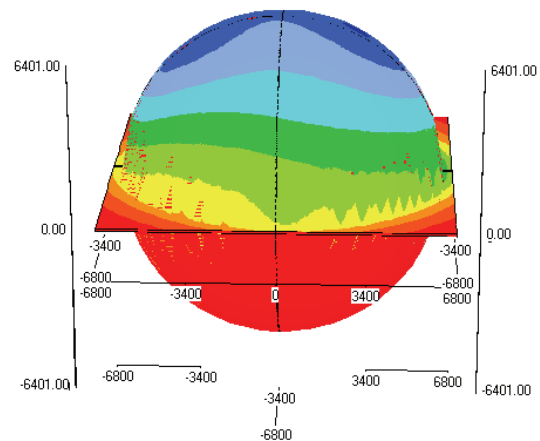
где ξ, η и ζ - координаты точки наблюдения.

а формула вида $A(x, y, z) \Big|_{x1}^{x2} \Big|_{y1}^{y2} \Big|_{z1}^{z2}$ расписывается по правилу:

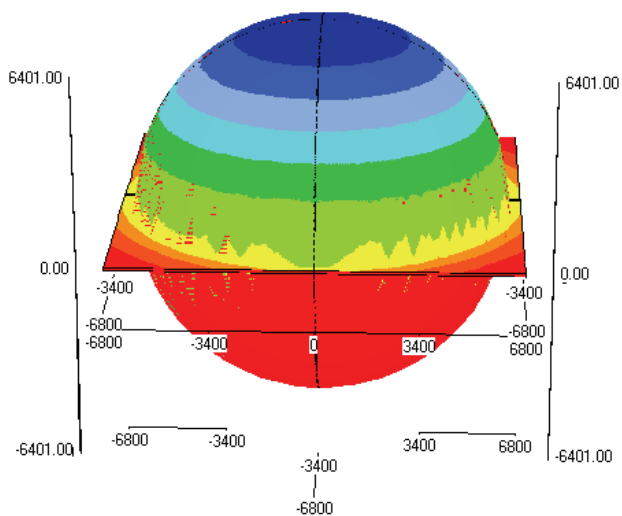
$$\begin{aligned} A(x, y, z) \Big|_{x1}^{x2} \Big|_{y1}^{y2} \Big|_{z1}^{z2} &= A(x2, y2, z2) + A(x2, y1, z1) + A(x1, y2, z1) + A(x1, y1, z2) - \\ &- A(x2, y2, z1) - A(x2, y1, z2) - A(x1, y2, z2) - A(x1, y1, z1) \end{aligned}$$



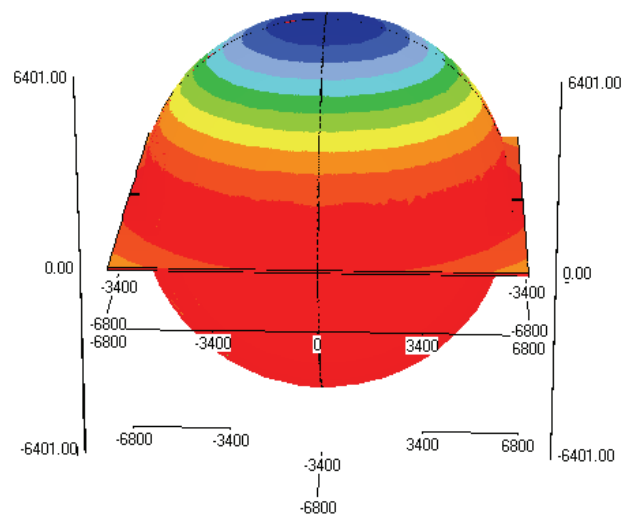
Исходная модель



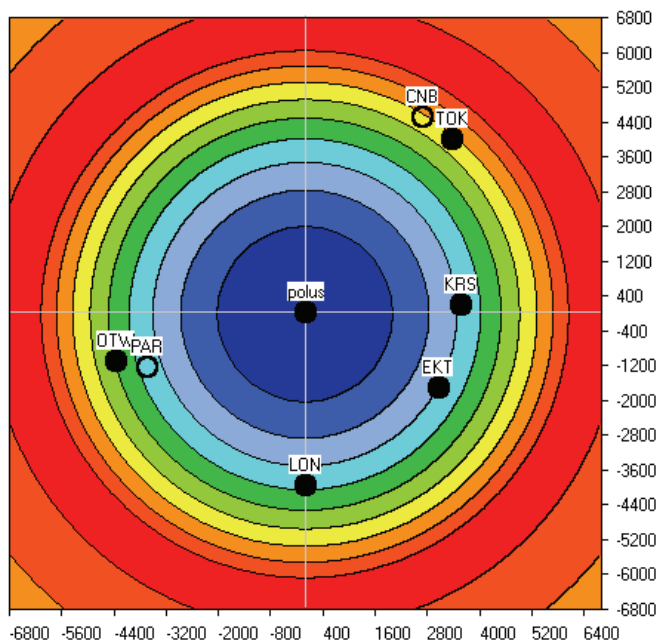
Исходное поле (северный полюс)



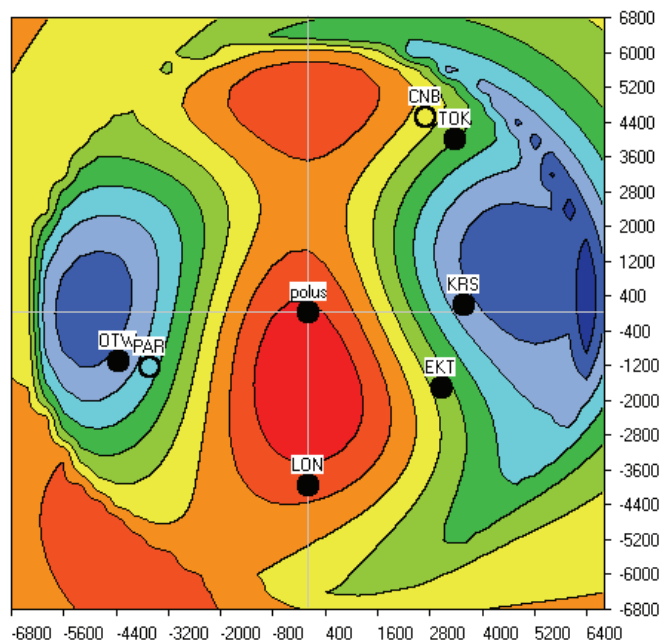
Модуль вектора напряженности
магнитного поля на северном
полюсе



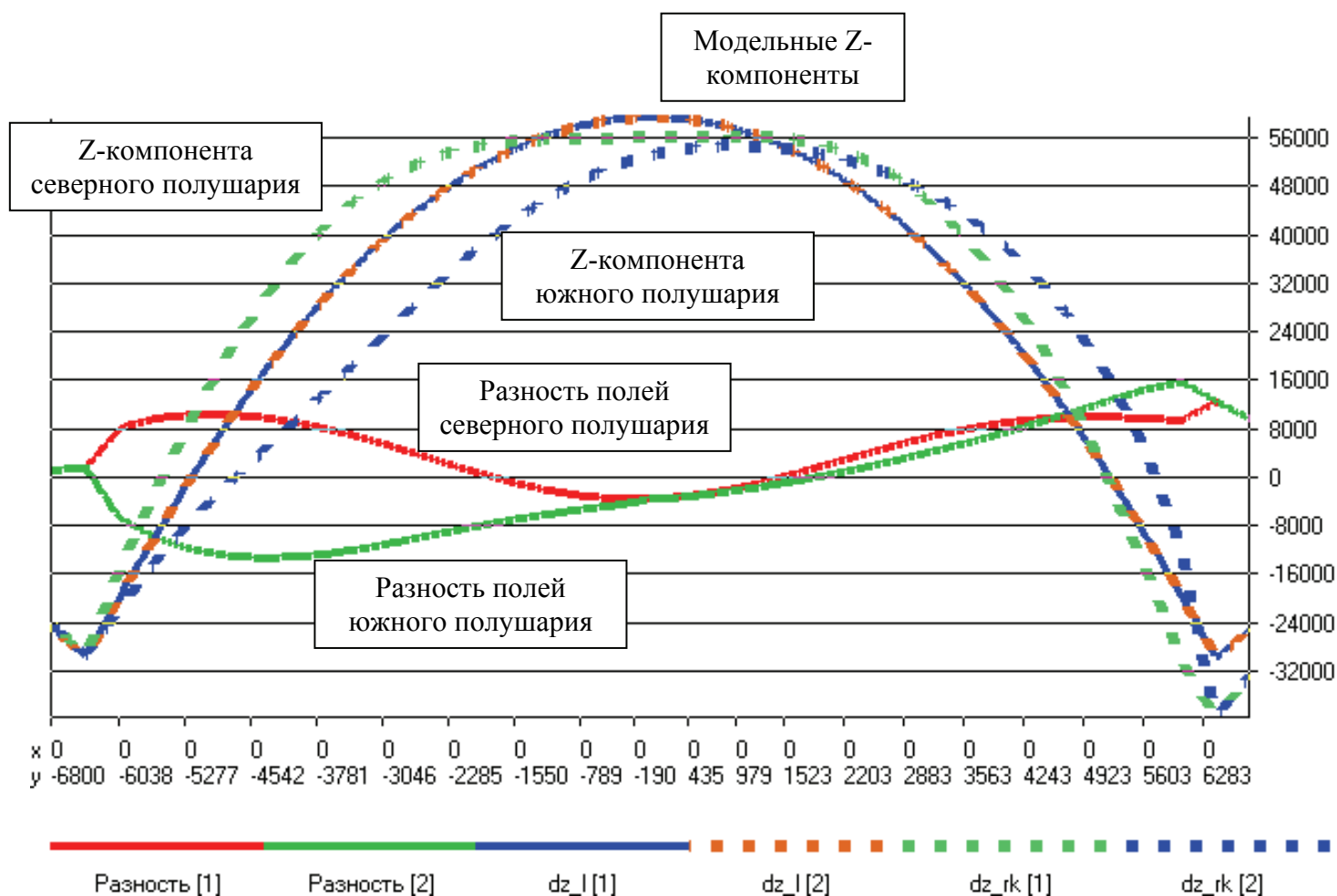
Модель Z-компоненты
магнитного поля



Z-компонента магнитного
поля модельного поля



Разность реального и
модельного поля



Графики полей по сечению 270-90 меридиана

Решение обратной задачи

После суммирования компонент полей от отдельных блоков в i -той точке получим 3 линейных уравнения, в которых неизвестными являются величины магнитной восприимчивости каждого из параллелепипедов, а коэффициенты зависят от вторых безразмерных производных потенциала Пуассона для прямоугольного параллелепипеда с известными размерами. Если компоненты H_x , H_y и H_z известны, или вместо них используется $\vec{H}_0$, то получим линейное уравнение, в котором неизвестными будут χ_{ef} .

$$\Delta B_i^s = \sum_{j=1}^N C_j^s \chi_{ef(j)}$$

Модуль индукции магнитного поля будет равен

$$\Delta B_i = \sqrt{\sum_{s=1}^3 (\Delta B_i^s)^2}$$

Поскольку такие же уравнения можно составить для каждой отдельной точки наблюдения, в итоге мы получим систему линейных или нелинейных уравнений, в которой, как правило, число уравнений m не совпадает с числом неизвестных n . Система может быть как недоопределенной ($m < n$), так и переопределенной ($m > n$). Поиск неизвестных проводится адаптивным методом решения систем алгебраических уравнений [Кочнев, 1983], [Кочнев, 1988], [Кочнев, 1993].

Подставим в очередное i -тое уравнение системы прогнозные значения величин магнитной восприимчивости для каждого из параллелепипедов χ_j и вычислим значения компонент магнитного поля (или абсолютного значения $\tilde{T}_i$) в i -ой точке наблюдения. Разность между фактическим значением поля T_i , вычисленным по модели IGRF и прогнозным значением назовем невязкой:

$$\Delta U_i = T_i - \tilde{T}_i$$

Предположим, что наличие невязки обусловлено отклонением прогнозных значений параметров от фактических и ошибками измерения. Представим невязку в виде суммы:

$$\Delta U_i = \sum_{j=1}^n \frac{\delta T_i}{\delta \chi_j} \Delta \chi_j + \varepsilon_i$$

где ε_i — случайная ошибка $\tilde{T}_i$.

Обозначив производную в уравнении (4) через P_{ij} , получим итоговую формулу для уточнения неизвестных по i -тому уравнению системы:

$$\Delta \chi_{ij} = \Delta U_i \frac{P_{ij} \sigma_j^2}{\sigma_0^2 + \sum_{j=1}^n P_{ij}^2 \sigma_j^2}$$

где σ_0 — оценка дисперсии погрешности T , σ_j — оценка дисперсии погрешности χ_j .

После уточнения неизвестных изменяется и оценка дисперсии неизвестных на очередном шаге решения:

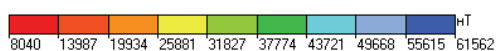
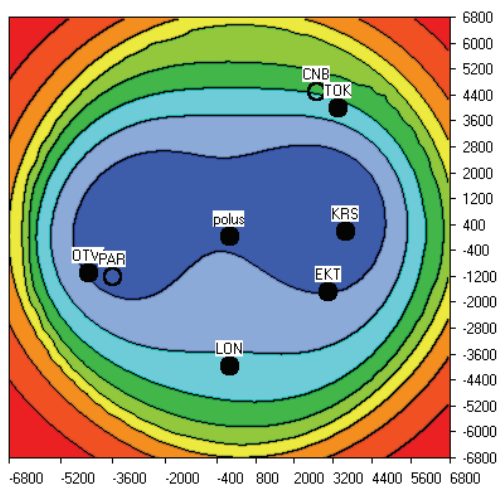
$$\sigma_j^2 = \sigma_j^2 (1 - \beta_{ij})$$

$$\beta_{ij} = \frac{\sigma_j^2 P_{ij}^2}{\Delta U_i^2 + \sigma_0^2 + \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 P_{ij}^2}$$

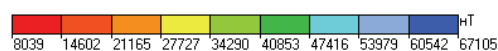
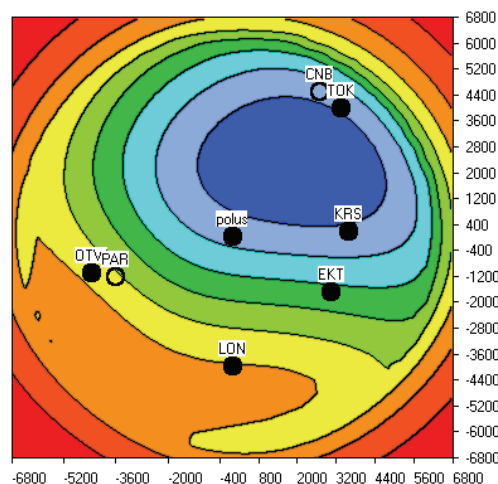
После уточнения неизвестных в i -том уравнении переходим к $i+1$, и так далее по всем уравнениям системы. Затем уточнение идет в обратном направлении, от последнего уравнения к первому. Весь цикл повторяется заданное число раз. На каждой итерации рассчитывается среднеквадратическая невязка.

Результаты решения обратной задачи

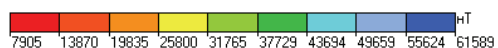
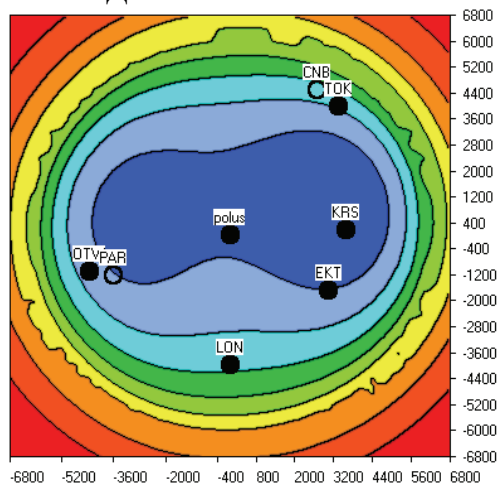
В данной задаче число уравнений
составляет $35*35*2=2450$,
а уточняемых неизвестных
 $16*16*2=512$.



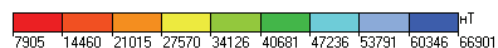
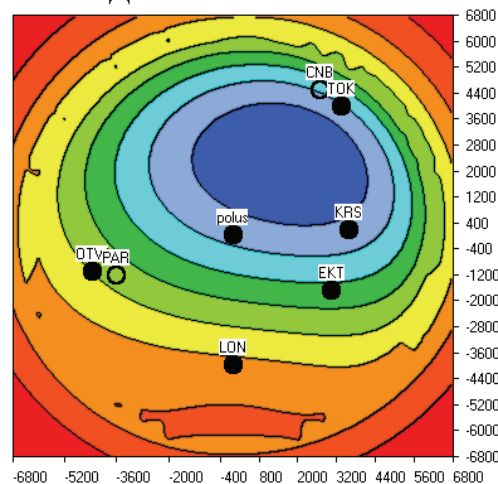
Исходное магнитное поле



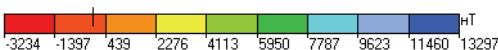
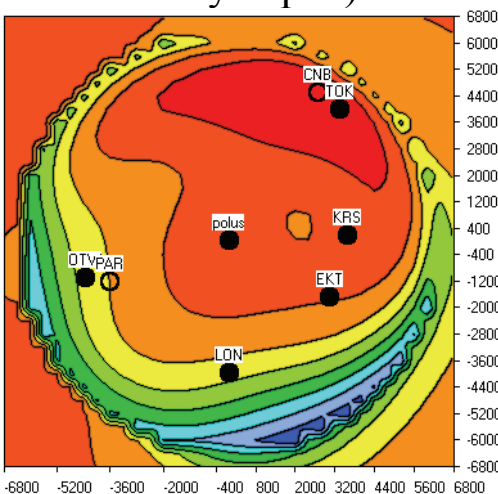
Исходное магнитное поле



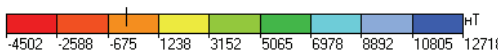
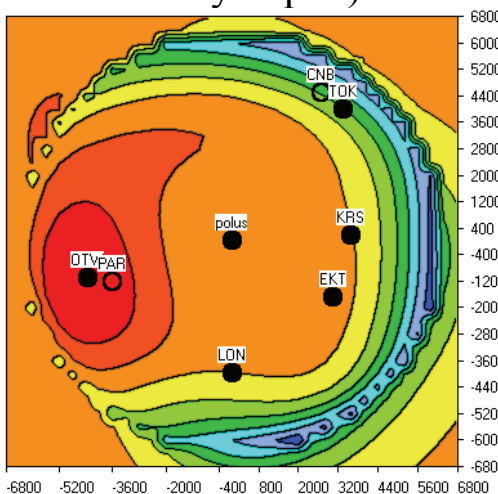
Модельное магнитное поле (северное полушарие)



Модельное магнитное поле (южное полушарие)

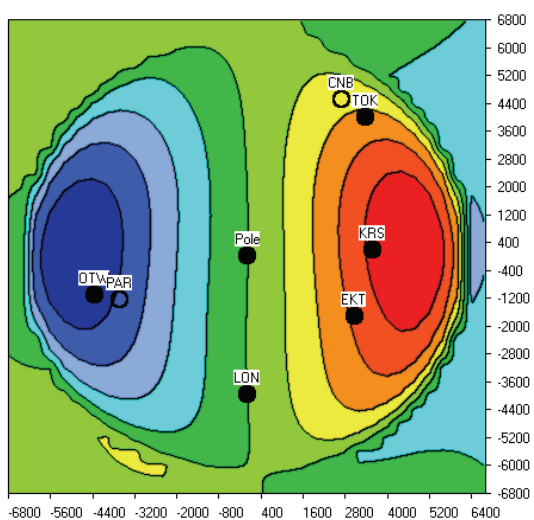


Разность между исходным и модельным полем (северное полушарие)

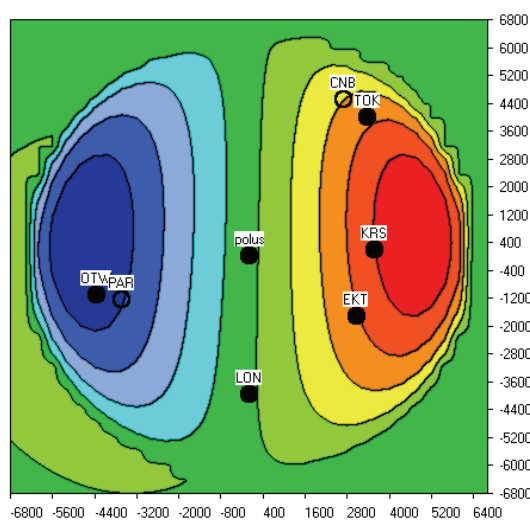


Разность между исходным и модельным полем (южное полушарие)

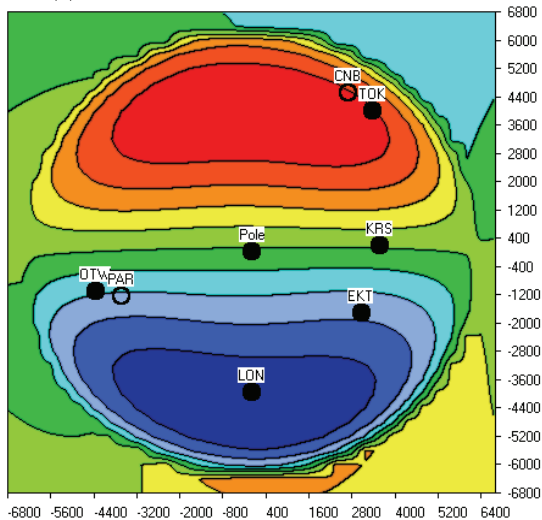
Результаты решения обратной задачи, компоненты поля в северном полушарии



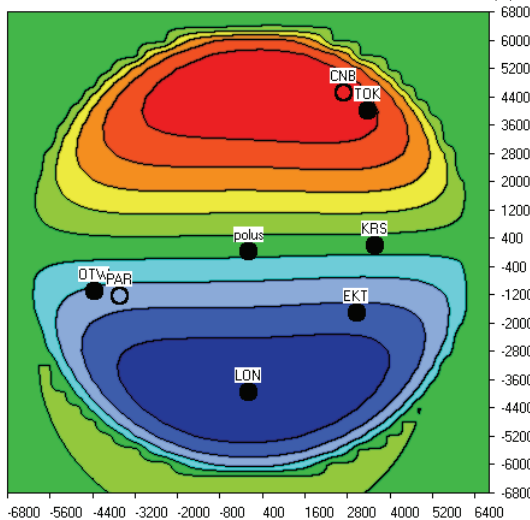
Исходная X-компонента магнитного поля



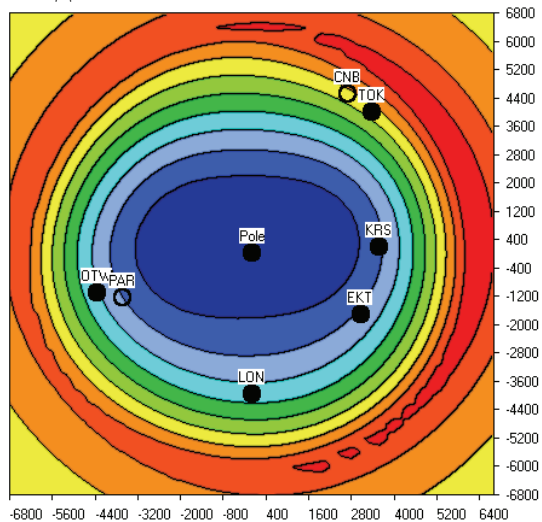
X-компонента магнитного поля от модели



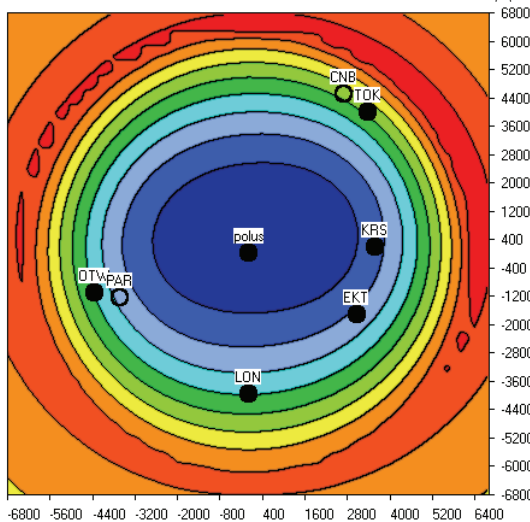
Исходная Y-компонента магнитного поля



Y-компонента магнитного поля от модели

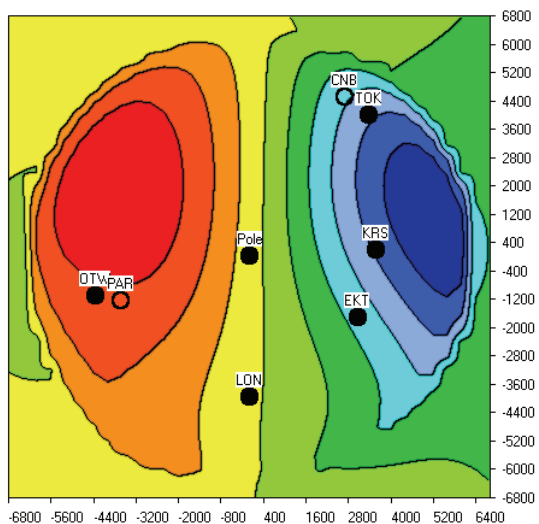


Исходная Z-компонента магнитного поля

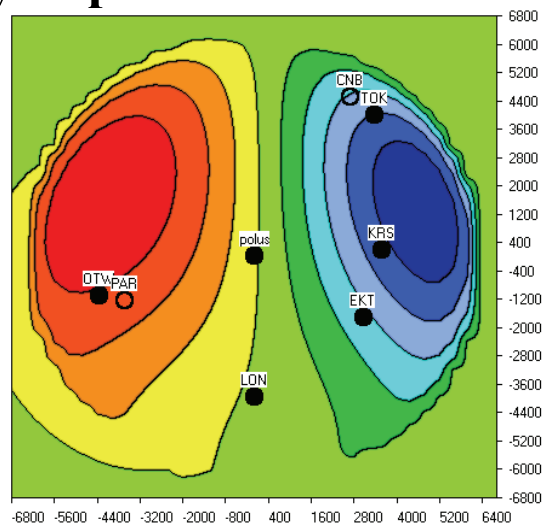


Z-компонента магнитного поля от модели

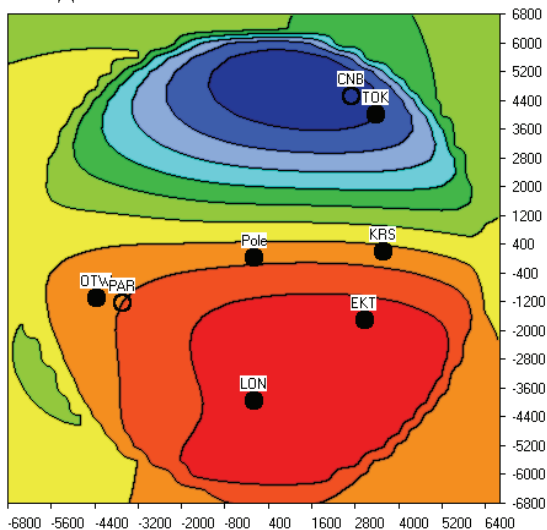
Результаты решения обратной задачи, компоненты поля в южном полушарии



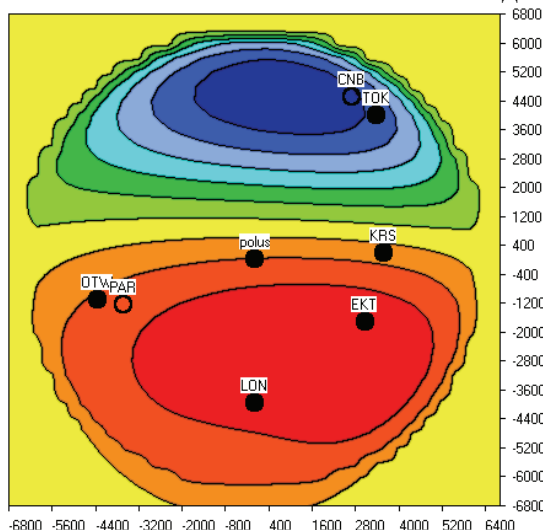
Исходная X-компонента магнитного поля



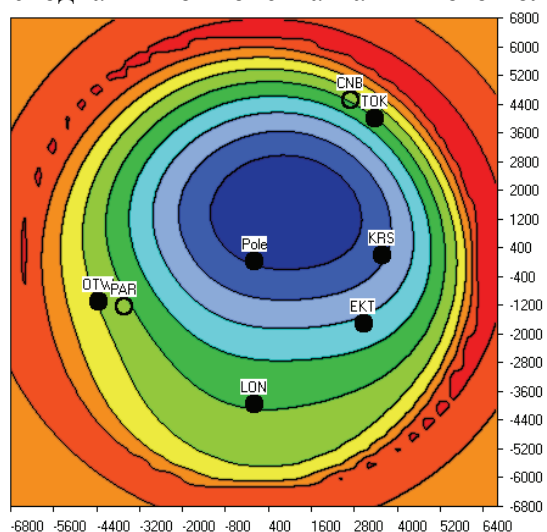
X-компонента магнитного поля от модели



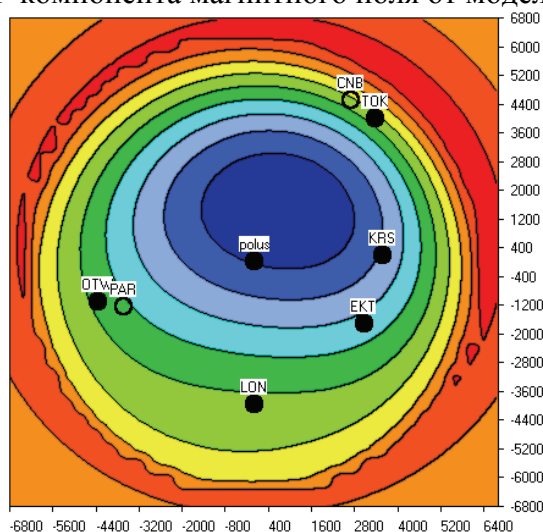
Исходная Y-компонента магнитного поля



Y-компонента магнитного поля от модели

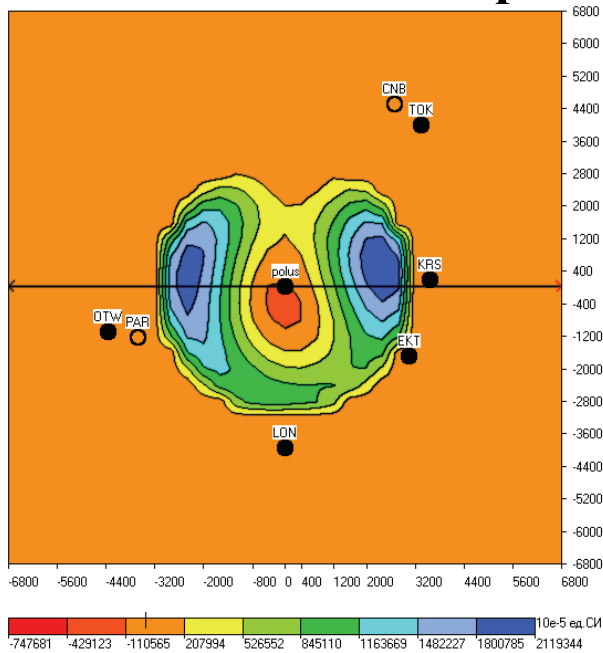


Исходная Z-компонента магнитного поля

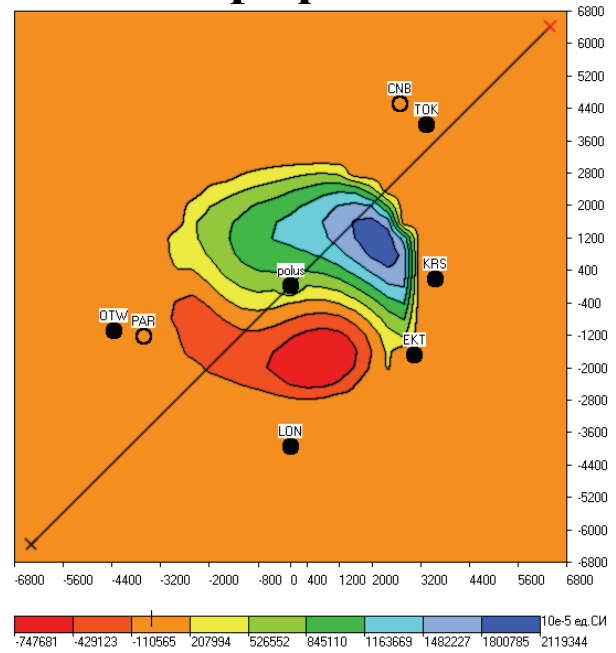


Z-компонента магнитного поля от модели

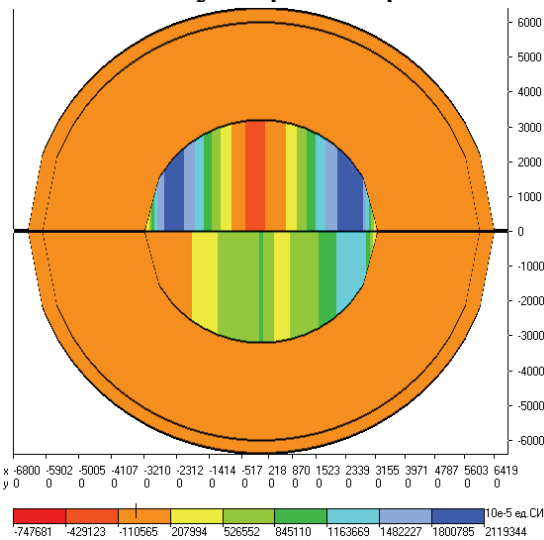
Результаты решения обратной задачи, эффективные магнитные восприимчивости и графики поля



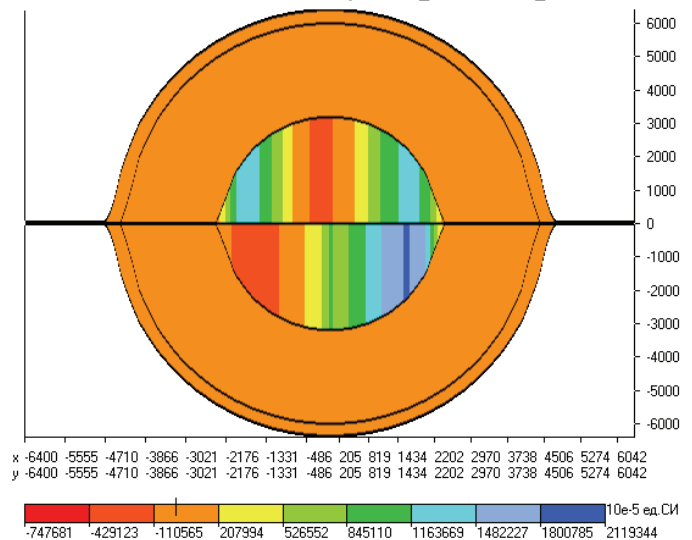
Эффективная магнитная восприимчивость северного полушария ядра



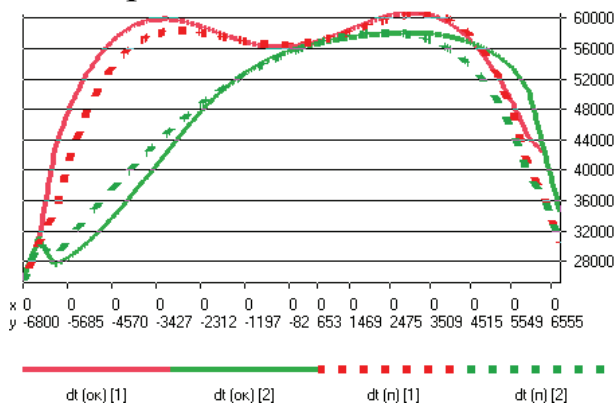
Эффективная магнитная восприимчивость южного полушария ядра



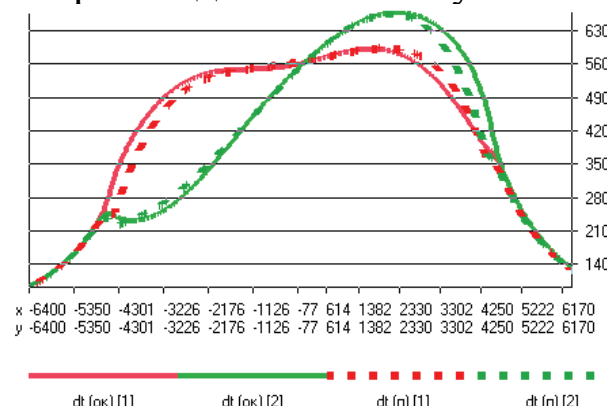
Разрез по сечению -270-90°



Разрез по диагональному сечению

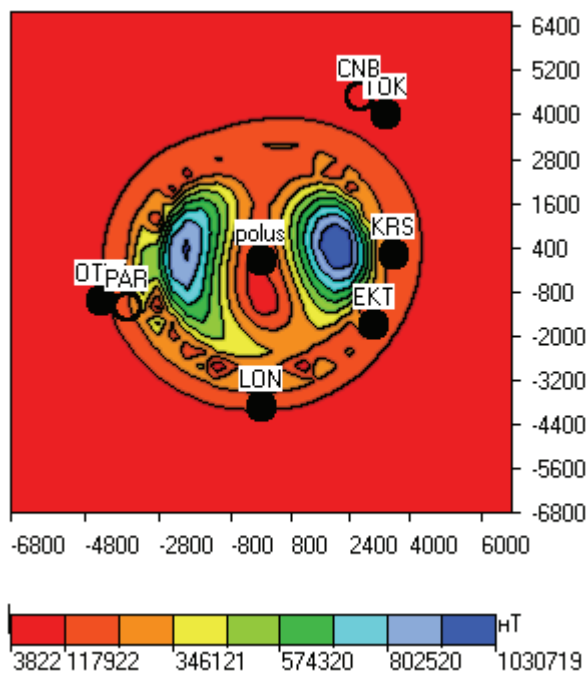


Графики исходного поля и поля от модели по сечению -270-90°

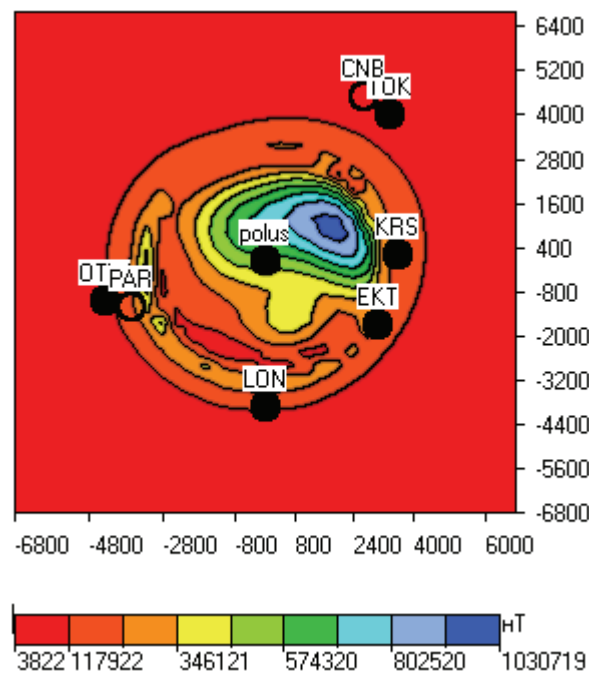


Графики исходного поля и поля от модели по диагональному сечению

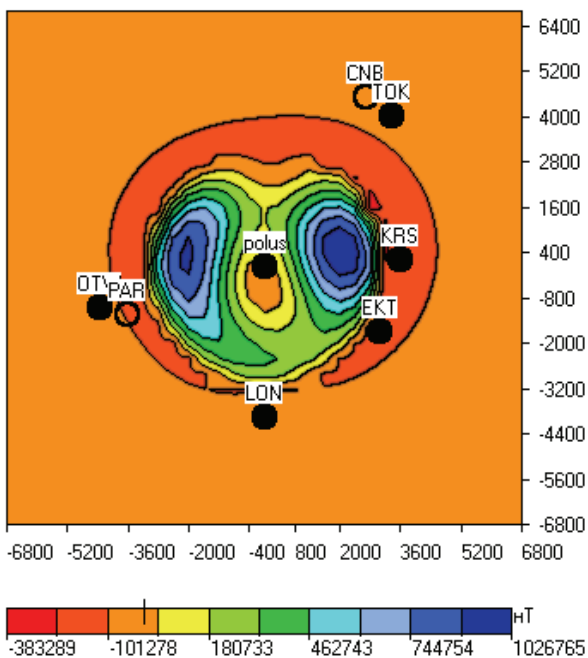
Результаты решения обратной задачи, поле над северной и южной поверхностью ядра



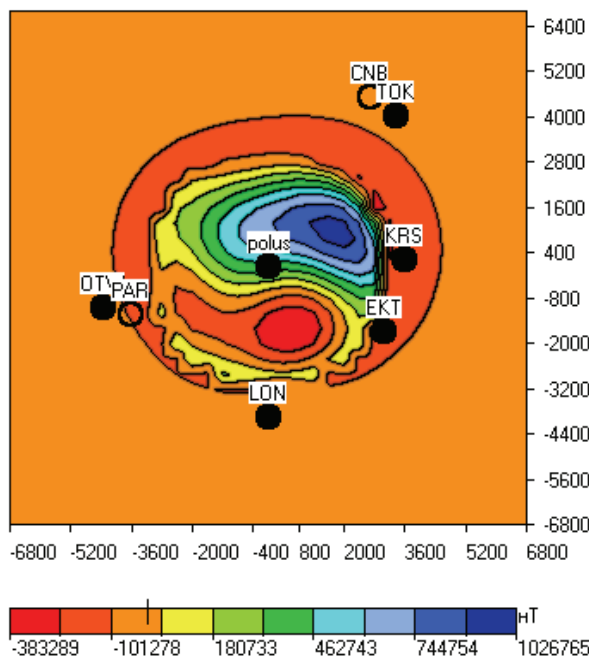
Поле над северной поверхностью ядра



Поле над южной поверхностью ядра

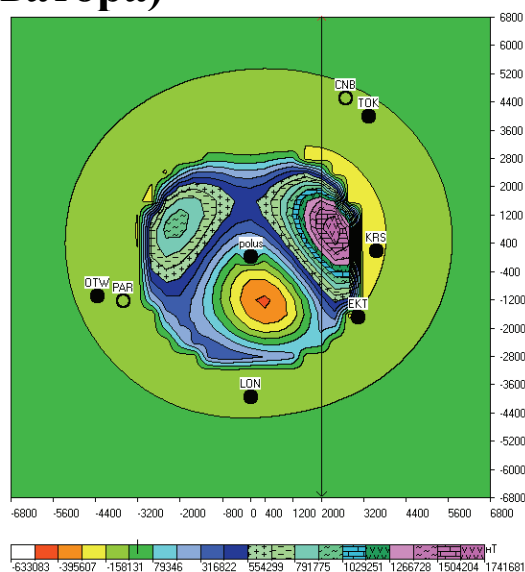
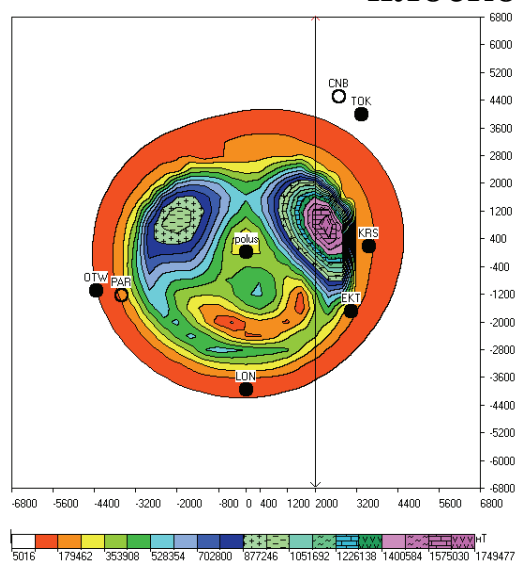


Z-компонента поля над северной поверхностью ядра



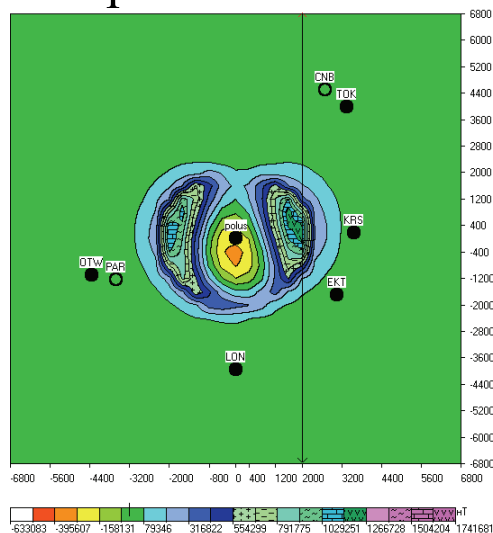
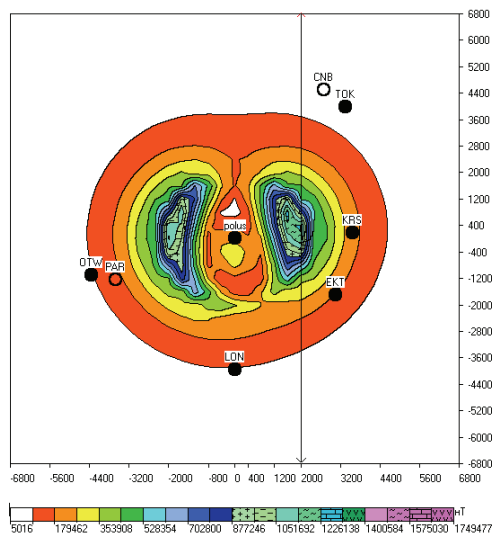
Z-компонента поля над южной поверхностью ядра

Сечения полного магнитного поля (слева) и z-компоненты(справа), проходящие через ядро (параллельно плоскости экватора)



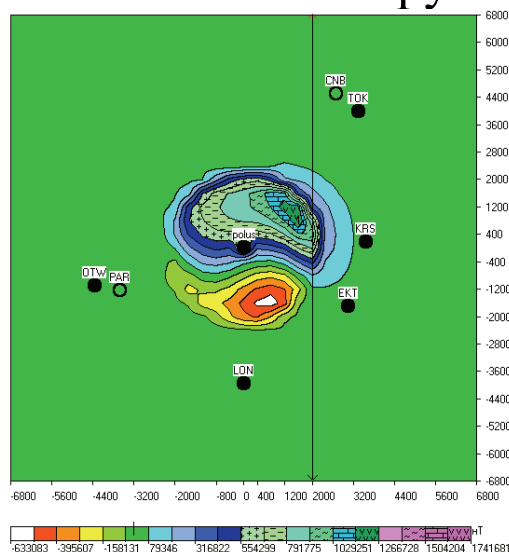
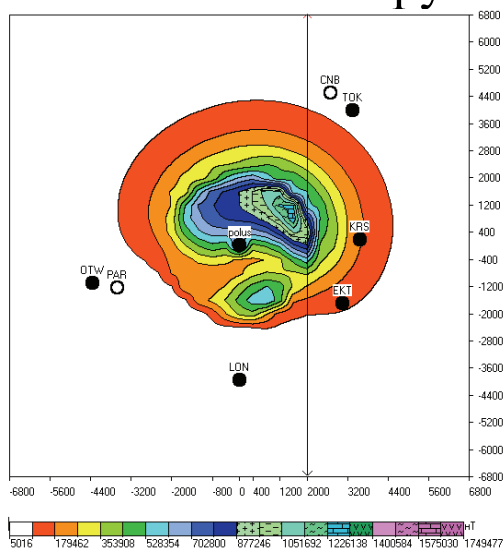
Экваториальная плоскость

Экваториальная плоскость



2400 км к северу

2400 км к северу



2400 км к югу

2400 км к югу

Интерпретация результатов

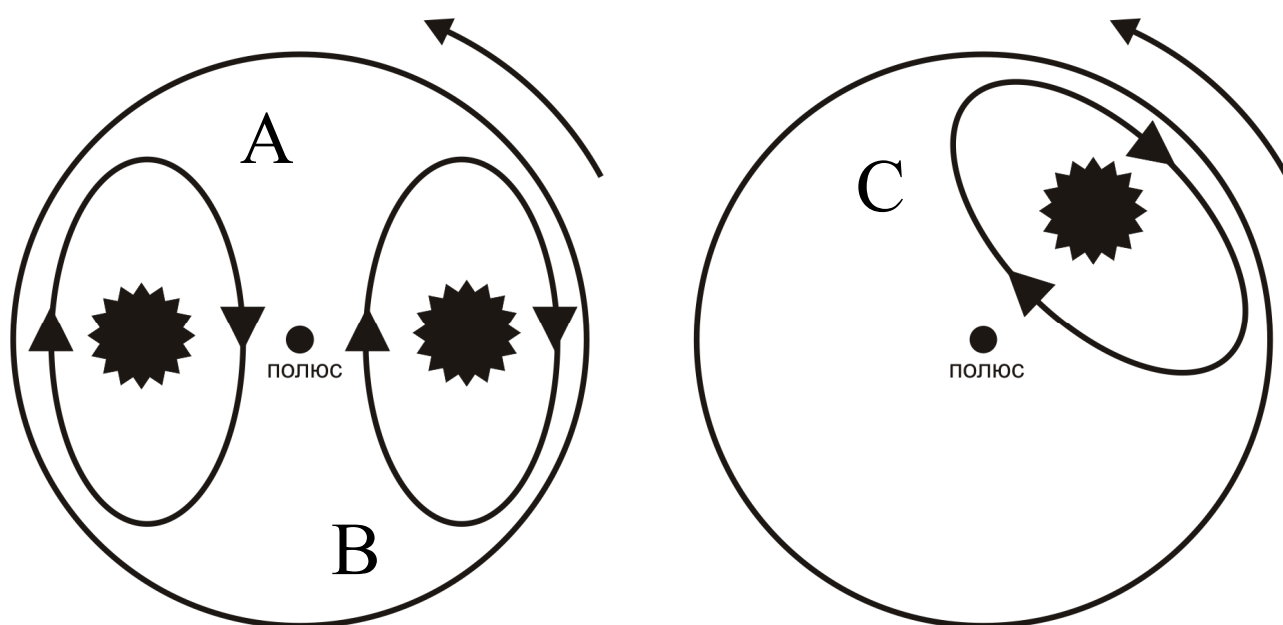


Схема вращения шара и направления токов, порождающих магнитное поле ядра. Вид со стороны северного полюса.
Главные токовые вихри, соответствующие глобальным аномалиям: А-канадский, В-сибирский, С-австралийский.

Выводы

Обращают на себя внимание следующие особенности токов и модели.

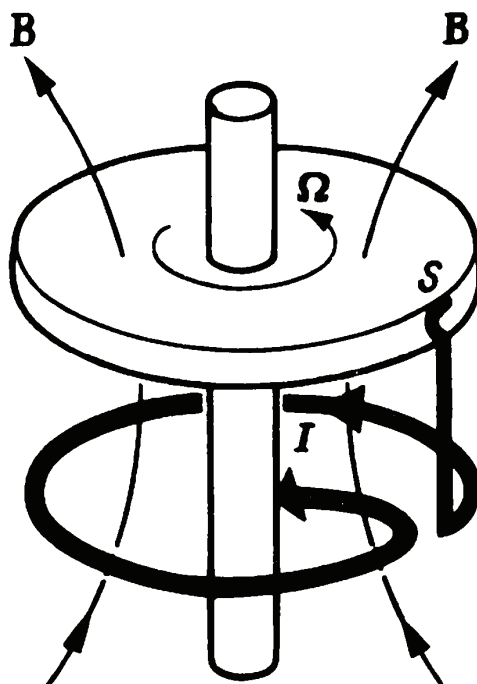
1. Их направление вблизи экватора ядра противоположно вращению шара.
2. Большой градиент изменения поля находится вблизи экваториальной области.
3. Сибирская и австралийская вихревые токовые спирали имеют одно и то же направление, и, судя по разрезу эффективной намагниченности являются одним и тем же вихревым потоком, пронизывающим восточную часть северного и южного полушария ядра. Это создает сильную асимметрию: магнитное поле, уменьшающееся в западном направлении. Отсутствие вихря в западной части модели южного полушария объясняет аномалию пониженного магнитного поля на поверхности шара и ядра в южном полушарии.
4. Важной особенностью модели является то, что в ней вместо центрального диполя – минимум, создаваемый вихрями токов, находящимися на периферии ядра.
5. Полученная в результате решения обратной задачи модель эффективной намагниченности позволяет рассчитывать компоненты магнитного поля на любом заданном уровне. На поверхности модели Земли реальные и модельные поля близки, особенно в центральной части. Некоторые отличия в экваториальной части шара могут быть обусловлены влиянием верхних слоев модели (коры и мантии).

Предположения

Приведем некоторые предположения, необходимые для дальнейшего обоснования полученной модели.

1. Направление вращения шара с запада на восток. Но газообразные и жидкие оболочки в экваториальной части отстают в этом вращении. По этой причине в экваториальной зоне возникают относительно обратные течения воздуха – пассаты. В океанах наблюдаются пассатные течения, скорость которых колеблется от 1 до 2 км/час. Жидкая субстанция ядра также должна иметь движение, обратное вращению шара. Если внутри шара, так же, как и на поверхности, существуют неоднородности, то с их участием будут создаваться вихревые движения масс, а следовательно, и токов.
2. Причиной, приводящей к возникновению потоков жидкости, относительно обратных вращению Земли, являются гравитационные силы Луны и Солнца, тормозящие движение жидких масс. Этим объясняются приливные течения.

3. Таким образом, направления движения жидких масс и токов совпадают. Именно это является необходимым условием самоподдерживающегося механического динамо, которое демонстрируется во многих учебниках и монографиях, как пример геодинамо.



Униполярное дисковое динамо. Отметим, что проволока, по которой течет ток I (г), должна быть закручена в том же направлении, в котором вращается диск. [8]

4. С механическим динамо все понятно, но как создать такую модель в природном объекте?

Это логично объясняется, если предположить, что движущиеся массы ядра являются электрически заряженными. По мнению некоторых исследователей, под действием высоких температур, когда разрушаются не только молекулы, но и атомы, теряющие электроны (аналогично эффекту Томпсона).

Возможные направления исследований

Следующими шагами должно быть:

1. Построение многослойной модели намагниченности, включающей земную кору, мантию и ядро.

2. Построение модели плотности токов, обеспечивающих получение магнитного поля, равного полю на поверхности ядра, а следовательно, и на поверхности шара. Задача эта сводится к решению интегрального уравнения Био-Савара, связывающего плотность тока с индукцией магнитного поля. По распределению плотности токов в ядре может быть более конкретно поставлена задача построения модели конвекции масс, создающих полученные токи.

Литература

1. Кочнев В.А., Гоз И.В. Модель источников магнитного поля ядра Земли, полученная в результате решения обратной задачи магнитометрии. // Мат. 38-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей». Пермь, 2011.
2. Обратные задачи геофизики [Электронный ресурс]. URL: <http://geoph.krasn.ru/> (доступ: 21.04.2011).
3. Кочнев В.А., Гоз И.В. Нераскрытые возможности магнитометрии // Геофизика. 2006. № 6. с. 51-55.
4. Болт Б. В глубинах Земли. М.: Мир, 1984.
5. Добрецов Н.Л. Глобальная геодинамическая эволюция Земли и глобальные геодинамические модели // Геология и геофизика. 2010. № 6. Р. 761-779.
6. Яновский Б.М. Земной магнетизм. Л., 1978. 592 р.
7. Демина И.М., Фарафонова Ю.Г. Дипольная модель главного магнитного поля Земли в XX веке // Геомагнетизм и аэрономия. 2004. Vol. 44, № 4. Р. 565-570.
8. Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 335 р.
9. Кочнев В.А. Адаптивные методы решения обратных задач геофизики. ВЦ СО РАН, Красноярск, учебное пособие, 1993.

Благодарности

Автор выражает признательность
А.С.Долгалю, В.В.Денисенко, Н.В.Еркаеву,
Ю.И.Блоху, В.В.Ломтадзе, прочитавшим
рукопись статьи и сделавшим замечания,
некоторые из которых были учтены.

Автор будет признателен за отзывы и
замечания специалистов по данной теме.